

## Analiza hybrydowa MES/SSN sprężysto-plastycznej konstrukcji kratowej poddanej obciążeniu cyklicznemu

### Hybrid MES/SSN analysis of the elastic-plastic truss under cyclic loading

Beata Potrzeszcz-Sut<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Katedra Mechaniki, Konstrukcji Metalowych i Metod Komputerowych,  
Wydział Budownictwa i Architektury, Politechnika Świętokrzyska,  
Department of Structure Mechanics, Metal Structures and Computer Methods,  
Faculty of Civil Engineering and Architecture, Kielce University of Technology  
Al. 1000-lecia PP 7, 25-323 Kielce  
e-mail: betatap@tu.kielce.pl.pl*

---

#### Streszczenie

W pracy przedstawiono zastosowanie programu hybrydowego integrującego metodę elementów skończonych (MES) oraz sztuczne sieci neuronowe (SSN) do nieliniowej analizy kratownicy płaskiej. SSN, służąca do realizacji zadania odwrotnego została sformułowana w trybie 'off line'. Uczucie i testowanie SSN przeprowadzono za pomocą danych pseudo empirycznych. Tak utworzona sieć stanowiła neuronowy model materiału (NMM) opisujący nieliniowy związek fizyczny Ramberga-Osgooda. NMM umożliwiał wyznaczenie naprężenia i modułu stycznego podczas cyklicznego obciążania konstrukcji. Przeprowadzone testy wskazują, że opracowany program MES/SSN może być zastosowany do analizy innych problemów brzegowych w jednoosiowym stanie naprężenia.

#### Abstract

The paper presents the application of a hybrid program that integrates finite element method (FEM) and artificial neural network (ANN) for nonlinear analysis of plane truss. ANN, used for the solving the inverse problem has been formulated in 'off line' mode. Learning and testing of ANN were been carried out using pseudo empirical data. The network formed thereby constitutes the neural material model (NMM), describes the Ramberg-Osgood nonlinear physical relationship. NMM makes possible to determine of the stress and tangential module during cyclic loading of the structure. Numerical tests indicate that the developed FEM/ANN program may be applied to analyse other boundary problems in the uniaxial stress state.

*Słowa kluczowe: nieliniowa analiza numeryczna, problem odwrotny, model materiału Ramberga-Osgooda, sztuczna sieć neuronowa, neuronowy model materiału*

*Keywords: nonlinear numerical analysis, inverse problem, Ramberg-Osgood material model, artificial neural network, neural material model*

---

#### 1. Wprowadzenie

Sztuczne sieci neuronowe (SSN) mogą być efektywnie stosowane do niejawnego modelowania równań fizycznych. W takim podejściu macierzą sztywności materiału może być neuronowy model materiału (NMM) stanowiący odwzorowanie SSN. NMM opisuje związek naprężenie-odkształcenie, z którego można obliczyć macierz konstytutywną. Algorytmiczny operator styczny jest wyznaczany jawnie za pomocą parametrów oraz danych wejściowych/wyjściowych NMM. Wyznaczanie parametrów NMM może być prowadzone w trybie 'on line' lub 'off line'.

W podejściu 'on line' model materiału jest formułowany podczas analizy danego problemu brzegowego za pomocą zintegrowanego programu MES/SSN. Budowanie NMM odbywa się iteracyjnie za pomocą zbiorów danych uczących tworzonych w trakcie wykonywanej analizy [5].

Technika 'off line' opiera się na danych eksperymentalnych lub pseudo eksperymentalnych, wziętych z analizy konstrukcji np. za pomocą metody elementów skończonych (MES) [3]. Tak sformułowany neuronowy model materiału nie wykorzystuje parametrów materiału i zależy od przyjętych zbiorów danych. NMM może być wykorzystany do zbudowania programu hybrydowego MES/SSN [8], a następnie zastosowany

#### 1. Introduction

Artificial neural networks (ANN) can be effectively applied to implicit modelling of constitutive relations. In this approach, the mapping represented by material stiffness matrix can be substituted by a neural model of material (NMM), given by ANN. NMM describes the stress-strain relationship, of which constitutive matrix can be calculated. Algorithmic tangent operator is determined explicitly by the parameters and input/output data of NMM. Determination of parameters of NMM can be carried out in 'on line' or 'off line' mode.

In the 'on line' approach the material model is formulated during the analysis of the given boundary problem by the integrated FEM/ANN program. Formulation of NMM is done iteratively using training data sets created while solving boundary value problem [5].

'Off line' technique is based on experimental or pseudo-experimental data, obtained from previous analysis of the structure, eg using the finite element method (FEM) [3]. The formulated neural material model does not use constitutive model parameters of the material and depends only on training data sets. NMM can be used to design a hybrid FEM/ANN program [8], and then can be applied to the analysis of the various boundary value problems.

do analizy różnych problemów brzegowych.

Opracowany w pracy program hybrydowy MES/SSN został zastosowany do analizy kratownicy płaskiej poddanej obciążeniu cyklicznemu. NMM stanowiła sieć neuronowa realizująca zadanie odwrotne wynikające z nieliniowego związku fizycznego Ramberga-Osgooda. SNN służyła również do identyfikacji modułu stycznego.

**2. Model materiału Ramberga-Osgooda**

Model materiału Ramberga-Osgooda [7] można stosować w przypadku materiałów bez wyraźnej granicy plastyczności, jako analityczne odwzorowanie zależności odkształcenie-napężenie.

W przykładzie omawianym w pracy, do opisu przebiegu zależności  $\varepsilon(\sigma)$  w elementach konstrukcji podczas obciążania przyrostowego przyjęto krzywą szkieletową modelu RO (1) wg [6].

$$\varepsilon(\sigma) = \frac{\sigma}{E} + \frac{2\sigma_0}{3E} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^n, \tag{1}$$

gdzie:

- $n$  – stopień wzmocnienia materiału.
- $\sigma_0$  – granica plastyczności przy odkształceniu 0,2%,
- $E$  – moduł Younga.

Proces odciążania opisuje rodzina pętli histerezy por. [1]:

$$\varepsilon - \varepsilon_R = \frac{\sigma - \sigma_R}{E} + \frac{4\sigma_0}{3E} \left(\frac{\sigma - \sigma_R}{2\sigma_0}\right)^n, \tag{2}$$

gdzie:

- $\varepsilon_R, \sigma_R$  – odkształcenie i napężenie w chwili rozpoczęcia procesu odciążania układu.

Parametry materiałowe występujące w równaniach (1, 2):  $\sigma_0=71,6$  MPa;  $n=5, E=59,9$  GPa przyjęto zgodnie z pracą [6].

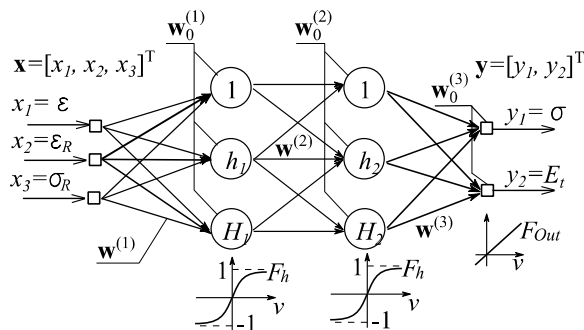
**3. Zastosowanie sztucznych sieci neuronowych do modelowania materiału**

W pracach [4, 6] pokazano, że sieci neuronowe traktowane, jako uniwersalne aproksymatory funkcji nieliniowych, mogą być zastosowane do opisu równań fizycznych materiału. W tym przypadku, NMM realizuje odwzorowanie:

$$\mathbf{y} = \text{NMM}(\mathbf{x}),$$

gdzie:  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  – wektory wejścia i wyjścia sieci.

a)



Rys. 1 a) architektura neuronowego modelu materiału, b) porównanie wyników testowania SSN z wartościami wygenerowanymi za pomocą prawa RO.

Fig. 1 a) architecture of neural material model, b) comparing results of testing ANN with values by RO law were generated.

Presented hybrid FEM/ANN program has been applied to the analysis of the plane truss under cyclic loading. The task of inverting nonlinear Ramberg-Osgood strain-stress law is done by ANN. The neural network can also provide the tangential module.

**2. Ramberg-Osgood material model**

The Ramberg-Osgood material model [7] can be used for materials without explicit yield stress, as the analytic projection of the strain-stress dependence.

In the example discussed in paper, to describe the the  $\varepsilon(\sigma)$  dependence in elements of the structure during the incremental loading, the skeleton curve of the RO model (1) has been adopted, according to [6].

where:

- $n$  – hardening exponent of the material
- $\sigma_0$  – yield strength at a strain of 0.2%,
- $E$  – Young’s modulus.

The process of unloading is described by a family of hysteresis loops, cf. [1]:

where:

- $\varepsilon_R, \sigma_R$  – strain and stress at the start of the unloading process of the structure.

The material parameters appearing in equations (1, 2):  $\sigma_0=71,6$  MPa;  $n=5, E=59,9$  GPa were adopted according to [6].

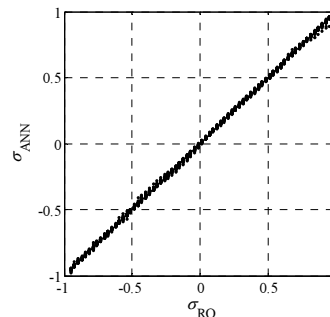
**3. Application of artificial neural networks for material modelling**

It has been shown in [4,6] that neural networks, regarded as a universal approximators of non-linear functions, can be used to describe constitutive relations. In this case, the NMM performs projection:

$$\mathbf{y} = \text{NMM}(\mathbf{x}),$$

where:  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  – input and output vectors of the network.

b)



W analizowanym zadaniu do identyfikacji zależności  $\sigma(\varepsilon, \varepsilon_R, \sigma_R)$  i  $E_t(\varepsilon, \varepsilon_R, \sigma_R)$  zastosowano jednokierunkową sieć warstwową (multi layer perceptron) (MLP).

SNN sformułowano za pomocą pseudo empirycznych wzorców wygenerowanych na podstawie potęgowego prawa RO opisanego równaniami (1) i (2). Przyjęto, że wejściem do sieci jest odkształcenie, odkształcenie i naprężenie występujące na początku procesu odciążania  $\mathbf{x} = [\varepsilon, \varepsilon_R, \sigma_R]$  natomiast wektor wyjściowy  $\mathbf{y} = [\sigma, E_t]$  zawiera naprężenie i moduł styczny. Przygotowano 6400 wzorców uczących oraz 225 wzorców testujących. Po wykonaniu obliczeń wstępnych, do dalszej analizy zaakceptowano sieć neuronową o dwóch warstwach ukrytych MLP: 3-  $H_1$  -  $H_2$  -2 przedstawioną na rysunku 1a. Wyjściowe sygnały dla przyjętej sieci dwuwarstwowej można przedstawić za pomocą zależności [2]:

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \mathbf{w}^{(3)} \cdot \tanh \left[ \mathbf{w}^{(2)} \cdot \tanh \left( \mathbf{w}^{(1)} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{w}_0^{(1)} \right) + \mathbf{w}_0^{(2)} \right] + \mathbf{w}_0^{(3)}, \tag{3}$$

gdzie:

$\mathbf{w}, \mathbf{w}_0$  – wektory parametrów sieci (wagi i biasy).

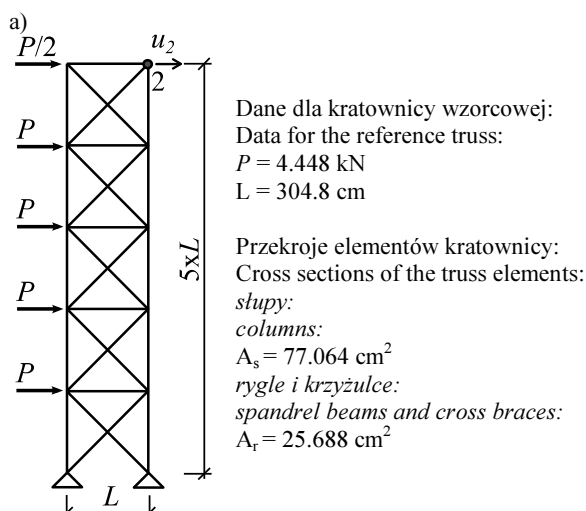
Warto podkreślić, że wartości składowych równania (3) są w sposób jawny określone przez znane wartości parametrów sieci (wagi i biasy). W tym sensie sieć neuronowa przestaje być „czarną skrzynką”.

Proces formułowania sieci MLP: 3-6-6-2 (por. rys. 2a) został zakończony po  $S = 1000$  epokach uczenia dla wartości błędów średniokwadratowych uczenia i testowania:  $MSEl = MSEt = 3,97e-4$  oraz błędów względnych procentowych  $APl = 4\%, APt = 6\%$ .

Na rys. 1b przedstawiono porównanie wyników symulacji i testowania sieci z wartościami wygenerowanymi za pomocą związków RO por. (1) i (2). Na podstawie otrzymanych wyników można stwierdzić, że opracowana sieć poprawnie odtwarza prawo fizyczne RO oraz moduł styczny.

4. Obliczenia numeryczne dla kratownicy

Przygotowaną w trybie ‘off line’ sieć MLP: 3-6-6-2 włączono do programu MES. Hybrydowy MES/SSN został zastosowany do analizy konstrukcji kratowej analizowanej w pracy [6]. Jest to kratownica o schemacie statycznym pokazanym na rysunku 2a.



Rys. 2 a) dane geometryczne analizowanej kratownicy, b) ścieżki równowagi  $A(u_2)$  obliczone za pomocą programu MES oraz punkty równowagi wyznaczone za pomocą MES/SSN.

In the analyzed task to the identify  $\sigma(\varepsilon, \varepsilon_R, \sigma_R)$  and  $E_t(\varepsilon, \varepsilon_R, \sigma_R)$  dependences, the feed-forward layered neural network (multi-layer perceptron - MLP) has been used.

ANN has been formulated using the pseudo empirical patterns generated on the basis of power law of the RO described by equations (1) and (2). It has been assumed that the network input is the strain, strain and the stress at the beginning of the unloading process  $\mathbf{x} = [\varepsilon, \varepsilon_R, \sigma_R]$ , and the output vector  $\mathbf{y} = [\sigma, E_t]$  contains stress and tangent modulus. The learning and testing sets consist of 6400 and 225 patterns, respectively. On the basis of preliminary computations, the neural network with two hidden layers: MLP: 3-  $H_1$  -  $H_2$  -2 has been accepted. The network architecture is illustrated in Figure 1a. The output signals for the assumed two-layered network can be presented by the correlation[2]:

where:

$\mathbf{w}, \mathbf{w}_0$  – vectors of network parameters (weights and biases).

It is worth stress that the component of the equation (3) is determined in transparent manner by the known values of the network parameters. In this sense, the neural network is no longer a "black box."

The process of formulating MLP: 3-6-6-2 (see Fig 2a) has been completed after  $S = 1000$  epochs of learning for the mean square errors of learning and testing:  $MSEl = MSEt = 3,97e-4$  and for the relative percentage errors  $APl = 4\%, APt = 6\%$ .

The comparison of results obtained by ANN mapping with values generated from RO (1,2) law is shown in Figure 1b. Analysing the results one can see, that the neural network correctly approximates RO model and tangent modulus

4. Numerical computations for truss

The MLP: 3-6-6-2 network prepared in ‘off line’ mode has been incorporated in the FEM program. FEM/ANN hybrid system has been applied to analyse the truss as in [6]. The static scheme of the truss is shown in Figure 2a.

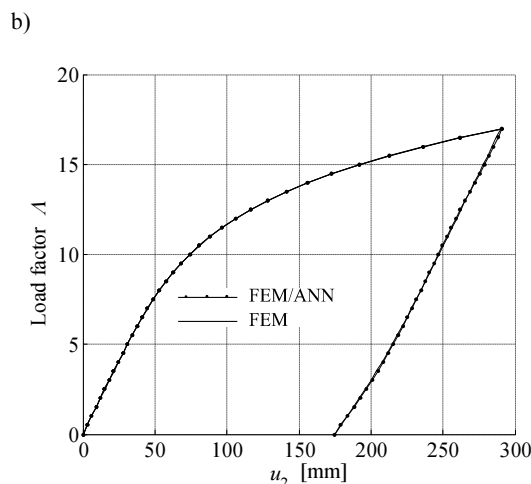


Fig. 2 a) geometry data of analysed truss, b) equilibrium paths  $A(u_2)$  data computed using FEM program and equilibrium points determined using FEM/ANN.

W analizowanym przykładzie, obliczenia wykonano za pomocą przyrostowej metody Newtona-Raphsona. Przyjęto obciążenie konfiguracyjne  $P^* = 4,448$  kN oraz 34 jednakowych przyrostów parametru obciążenia  $\Delta A = 0,5$ . Maksymalne obciążenie  $P = AP^*$  osiągnęło wartość 75,616 kN podczas obciążania układu. Na rys. 2b przedstawiono ścieżki równowagi  $A(u_2)$  obliczoną za pomocą programu MES oraz punkty równowagi wyznaczone za pomocą programu MES/SNN.

Analiza wykonanych przykładów wskazuje, że program hybrydowy MES/SSN poprawnie realizuje obliczenia. Błąd względny procentowy dla maksymalnego przemieszczenia  $-u_2$ , obliczonego za pomocą NMM nie przekroczył 1% w stosunku do standardowej metody MES.

## 5. Uwagi i wnioski końcowe

Zastosowane w przeprowadzonych badaniach trzywarstwowe sieci neuronowe MLP okazały się efektywnymi strukturami do realizacji zagadnienia odwrotnego, służącego do identyfikacji modelu materiału. Na uwagę w przeprowadzonej analizie zasługuje fakt, że wyznaczono dwa parametry – naprężenie i moduł styczny za pomocą jednej sformułowanej sieci neuronowej – NMM. Analiza wykazała, że neuronowy model materiału może z powodzeniem zastąpić nieliniowe związki pomiędzy odkształceniem i naprężeniem w programie MES. Opracowany hybrydowy system MES/SSN może być wykorzystany do analizy innych problemów brzegowych w jednoosiowym stanie naprężenia.

## Literatura • References

- [1] Akazawa T, Nakashima M, Sakaguchi O., (1996), *Simple model for simulating hysteretic behavior involving significant strain hardening*, Eleventh World Conference on Earthquake Engineering, Paper No. 264.
- [2] Bishop C. M., (1995), *Neural networks for pattern recognition*. Oxford: Clarendon Press.
- [3] Furukawa T., Yagawa G., (1998), *Implicit constitutive modelling for viscoplasticity using neural networks*, Intern. J. for Numerical Methods in Eng., 1998, 43:195-219.
- [4] Ghaboussi J., Pecknold D. A., Zhang M., Haj-Ali R., (1998), *Autoprogressive training of neural network constitutive models*, Int. J. Num. Meth. Eng., 42:105-126.
- [5] Hashash Y. M., Jung S. and Ghaboussi J., (2004), *Numerical implementation of a neural network based material model in finite element analysis*, Int. J. Num. Meth. Eng., 59:989-1005.
- [6] Pabisek E., (2008), *Hybrid systems integrating FEM and ANN for the analysis of selected problems of structural and materials mechanics*, Cracow University of Technology, Series Civil Engineering, Monograph, 369, Cracow, (in Polish).
- [7] Ramberg W., Osgood W. R., (1943), *Description of stress-strain curves by three parameters*, Technical Note No 902, National Committee for Aeronautics, Washington DC.
- [8] Waszczyszyn Z., Pabisek E., (1999), *Hybrid NN/FEM analysis of the elastoplastic plane stress problem*, Comp. Assisted Mech. Eng. Sci., 6:177-118

In the above example, the computations have been performed using the incremental Newton-Raphson method. Assumed configuration load  $P^* = 4,448$  kN and 34 equal increments of load parameter  $\Delta A = 0,5$ . Maximum value of the load  $P = AP^*$  reached 75,616 kN during the total loading of structure. The equilibrium paths  $A(u_2)$  and equilibrium points both shown in Figure 2b, have been computed using the FEM and FEM/ANN program respectively.

Concerning the above one can conclude that hybrid FEM/ANN program gives the correct results within accepted error bounds. The relative percentage error for the maximum displacement  $-u_2$ , computed using NMM does not exceed 1% relative to the standard FEM method.

## 5. The final remarks and conclusions

The three-layer MLP neural networks used in the presented studies have proven to be effective tool for the implementation of the inverse problem, of identification of material model. It is worth to highlight that two parameters – the stress and tangent modulus determined by NMM. Thus solving non-linear relationship in FEM program can be effectively substituted by ANN. The hybrid FEM/ANN system may be used to analysis of other boundary problems in the uniaxial state of stress.