

## Zastosowanie obliczeń symbolicznych i języka programowania PERL w geometrycznie nieliniowej analizie MES konstrukcji cienkościennych

### Application of symbolic calculations and PERL programming language in the geometrically nonlinear FE analysis of thin-walled structures

Sławomir Koczubiej<sup>1</sup>, Czesław Cichoń<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Katedra Informatyki Stosowanej,  
Wydział Zarządzania i Modelowania Komputerowego, Politechnika Świętokrzyska  
Al. 1000-lecia PP 7, 25-323 Kielce

<sup>1</sup>e-mail: slawomir.koczubiej@tu.kielce.pl

<sup>2</sup>e-mail: czeslaw.cichon@tu.kielce.pl

#### Streszczenie

W pracy przedstawiono zastosowanie zaawansowanych narzędzi informatycznych do obliczania macierzy sztywności stycznej i wektora sił wewnętrznych w geometrycznie nieliniowej analizie konstrukcji cienkościennych.

#### Abstract

In the paper, application of the advanced informatics tools to computation of the tangent stiffness matrix and internal forces vector in geometrically nonlinear analysis of thin-walled structures has been presented.

*Słowa kluczowe: konstrukcje cienkościenne, MES, całkowity opis Lagrange'a, obliczenia symboliczne, wyrażenia regularne*  
*Keywords: thin-walled structures, FEM, total Lagrangian approach, symbolic calculations regular expressions*

#### 1. Wstęp

Skuteczność skończenie elementowej nieliniowej analizy konstrukcji zależy od poprawnego sformułowania macierzy sztywności stycznej i wektora sił wewnętrznych elementu skończonego. Częstym przypadkiem jest odstępowanie od dokładnego spełniania przyjętych założeń co powoduje, w najlepszym przypadku, znaczne wydłużenie procesu iteracyjnego rozwiązywania przyrostowych równań równowagi [1]. W pracy przedstawiono procedurę obliczeń dla belkowego elementu cienkościennego o otwartym przekroju poprzecznym, w której stosując całkowity opis Lagrange'a uwzględniono dokładnie w równaniach dla przemieszczeń efekty od skończonych obrotów [4]. W procedurze skorzystano z obliczeń symbolicznych, oferowanych przez system MATLAB i języka programowania PERL, wspierającego operacje z wykorzystaniem wyrażeń regularnych.

#### 2. Przyrostowe równanie równowagi MES

Wykorzystując formalizm *całkowitego opisu Lagrange'a*, przyrostowe równanie równowagi dla elementu skończonego otrzymamy z równania wariacyjnego

$$\delta W_c = \delta W_z, \quad (1)$$

wyrażającego równość pracy wirtualnej sił wewnętrznych i obciążenia zewnętrznego

$$\int_{V^0} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV^0 = \int_{V^0} (\delta \Delta \mathbf{u})^T \mathbf{g} dV^0 + \int_{S^0} (\delta \Delta \mathbf{u})^T \mathbf{t} dS^0, \quad (2)$$

gdzie:  $\boldsymbol{\varepsilon}$  - jest wektorem odkształceń Greena-Lagrange'a,  $\boldsymbol{\sigma}$  - jest wektorem naprężeń Piola-Kirchhoffa II rodzaju.

Przyjmując, że równanie (2) wyraża stan równowagi konstrukcji w konfiguracji  $t + \Delta t$  oraz, że stany naprężeń i odkształceń są sumą znanych stanów w konfiguracji  $t$  oraz przyrostów pomiędzy konfiguracjami równowagi  $t$  i  $t + \Delta t$

#### 1. Introduction

Efficiency of the nonlinear finite element structure analysis depends on properly formulation of the tangent stiffness matrix and vector of internal forces of the finite element. Very often, assumptions of the problem under consideration are simplified what results, in the best case, elongation of the iterative solution of incremental equilibrium equations of the structure [1]. In the paper, the procedure of FE calculation for the thin-walled beam element with the open cross-section using the total Lagrangian description is presented. It was assumed that displacements due to finite rotations can be essential in the stability analysis and exactly should be taken into account [4]. In procedure, symbolic calculations provided by MATLAB software and PERL programming language, supporting operations that employ regular expressions, were used.

#### 2. FE incremental equilibrium equation

Assuming the total Lagrangian formalism, FE incremental equilibrium equation is obtained from the variational equation

$$\delta W_c = \delta W_z, \quad (1)$$

expresses equality of the virtual work of internal and external forces

$$\int_{V^0} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV^0 = \int_{V^0} (\delta \Delta \mathbf{u})^T \mathbf{g} dV^0 + \int_{S^0} (\delta \Delta \mathbf{u})^T \mathbf{t} dS^0, \quad (2)$$

where  $\boldsymbol{\varepsilon}$  is the Green-Lagrange strain vector and  $\boldsymbol{\sigma}$  is the 2<sup>nd</sup> Piola-Kirchhoff stress vector.

Assuming that equation (2) express the equilibrium state of the structure in configuration  $t + \Delta t$ , and that stresses and strains in configuration  $t$  are known, it can be written

$$\boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} = \boldsymbol{\sigma}^t + \Delta\boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{t+\Delta t} = \boldsymbol{\varepsilon}^t + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3)$$

i wykorzystując zależność  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \Delta\mathbf{e} + \Delta\boldsymbol{\eta}$  oraz dodatkowo  $\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\Delta\mathbf{e}$ , zasadę prac wirtualnych w formie przyrostowej będzie można zapisać jako

$$\int_{V^0} (\delta\Delta\mathbf{e})^T \mathbf{D}\Delta\mathbf{e} dV^0 + \int_{V^0} (\delta\Delta\boldsymbol{\eta})^T \boldsymbol{\sigma}^t dV^0 + \int_{V^0} (\delta\Delta\mathbf{e})^T \boldsymbol{\sigma}^t dV^0 = \int_{V^0} (\delta\Delta\mathbf{u})^T \mathbf{g}^{t+\Delta t} dV^0 + \int_{S^0} (\delta\Delta\mathbf{u})^T \mathbf{t}^{t+\Delta t} dS^0. \quad (4)$$

Oznaczając przez  $\mathbf{N}$  wektor funkcji kształtu i przez  $\mathbf{q}$  wektor stopni swobody dla elementu skończonego, interpolację wektora funkcji przemieszczeń  $\mathbf{u}$  i jego przyrostu  $\Delta\mathbf{u}$  wyrażą zależności

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q}, \quad \Delta\mathbf{u} = \mathbf{N}\Delta\mathbf{q}. \quad (5)$$

Wektor przyrostów odkształceń liniowych można formalnie zapisać w postaci  $\Delta\mathbf{e} = \mathbf{L}\Delta\mathbf{u}$  i wykorzystując (5) otrzymamy zależność  $\Delta\mathbf{e} = \mathbf{B}_L\Delta\mathbf{q}$ , gdzie  $\mathbf{B}_L = \mathbf{L}\mathbf{N}$ .

Uwzględniając powyższe równania, macierz styczną  $\mathbf{k}_T = \mathbf{k}_L + \mathbf{k}_\sigma$  dla elementu skończonego można określić z

$$\int_{V^0} (\delta\Delta\mathbf{e})^T \mathbf{D}\Delta\mathbf{e} dV^0 = (\delta\Delta\mathbf{q})^T \mathbf{k}_L \Delta\mathbf{q}, \quad \mathbf{k}_L = \int_{V^0} \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L dV^0, \quad (6)$$

oraz

$$\int_{V^0} (\delta\Delta\boldsymbol{\eta})^T \boldsymbol{\sigma}^t dV^0 = (\delta\Delta\mathbf{q})^T \mathbf{k}_\sigma \Delta\mathbf{q}, \quad \mathbf{k}_\sigma = \int_{V^0} \mathbf{B}_N^T \mathbf{T}^t \mathbf{B}_N dV^0, \quad (7)$$

gdzie  $\mathbf{k}_L$  jest macierzą sztywności przyrostową,  $\mathbf{k}_\sigma$  jest macierzą początkowych naprężeń, a  $\mathbf{T}^t$  jest macierzą naprężeń. Postać macierzy zróżniczkowanych funkcji kształtu  $\mathbf{B}_N$  wynika z aproksymacji skończenie elementowej wektora przyrostów odkształceń nieliniowych  $\Delta\boldsymbol{\eta}$ .

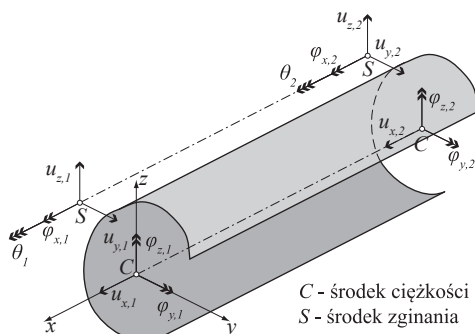
Wektor sił wewnętrznych  $\mathbf{f}$  występuje w równaniu

$$\int_{V^0} (\delta\Delta\mathbf{e})^T \boldsymbol{\sigma}^t dV^0 = (\delta\Delta\mathbf{q})^T \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = \int_{V^0} \mathbf{B}_L^T \boldsymbol{\sigma}^t dV^0. \quad (8)$$

### 3. Procedura obliczania macierzy stycznej i wektora sił wewnętrznych

Belkowy element cienkościenny ma dwa węzły i siedem stopni swobody w węzle (rys. 1a.). Wektor przyrostów stopni swobody dla węzła ma postać

$$\Delta\mathbf{q}_n = \{\Delta u_x^0 \quad \Delta u_y^0 \quad \Delta u_z^0 \quad \Delta\varphi_x \quad \Delta\varphi_y \quad \Delta\varphi_z \quad \Delta\theta\}_n. \quad (9)$$



Rys. 1. Elementy skończone: a) belkowy cienkościenny, b) prętowy  
Fig. 1. Finite elements: a) thin-walled beam, b) bar

Metoda obliczeń polegająca na bezpośrednim wykorzystaniu równań (6), (7) i (8) jest nieefektywna, jeśli w ogóle możliwa. W konsekwencji macierze sztywności i wektor sił wewnętrznych były obliczane według procedury wykorzystującej możliwości systemu MATLAB [5]

Substitution relations (3) and  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \Delta\mathbf{e} + \Delta\boldsymbol{\eta}$  and  $\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\Delta\mathbf{e}$  into equation (2) leads to the incremental virtual work principle in the form

Denoting as  $\mathbf{N}$  matrix of shape functions and as  $\mathbf{q}$  vector of degrees of freedom of the finite element, the following interpolation formulas can be written

Vector of the linear strain increments can be formally written in the form  $\Delta\mathbf{e} = \mathbf{L}\Delta\mathbf{u}$  and after using (5) as  $\Delta\mathbf{e} = \mathbf{B}_L\Delta\mathbf{q}$ , where  $\mathbf{B}_L = \mathbf{L}\mathbf{N}$ .

Using the above relations, tangent stiffness matrix  $\mathbf{k}_T = \mathbf{k}_L + \mathbf{k}_\sigma$  of the finite element, is calculated from the equations

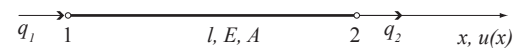
and

where  $\mathbf{k}_L$  is the incremental stiffness matrix,  $\mathbf{k}_\sigma$  is the initial stress matrix,  $\mathbf{T}^t$  is the 2<sup>nd</sup> Pioli-Kirchhoff matrix and the form of the matrix  $\mathbf{B}_N$  can be easily deduced from the non-linear part of strain increments vector  $\Delta\boldsymbol{\eta}$ .

Vector of internal forces  $\mathbf{f}$  is calculated from equations

### 3. Procedure calculation of tangent matrix and vector of internal forces

Thin-walled beam element has two nodes and seven degrees of freedom in the node, Fig. 1. The vector of node degrees of freedom increments has the form



The calculation method involving direct use of equations (6), (7) and (8) is inefficient, if it is possible at all. According to the ideas presented in the introduction, the tangent stiffness matrix and internal force vector were calculated using symbolic calculations provided by MATLAB software [5] and PERL

i skryptowego języka programowania PERL [2], który ma zaimplementowaną obsługę wyrażeń regularnych [3].

Opis procedury objaśnimy na prostym przykładzie obliczania macierzy przyrostowej dla elementu prętowego (rys. 1b.) o dwóch stopniach swobody

$$\Delta \mathbf{q} = \{\Delta q_1 \quad \Delta q_2\}. \quad (10)$$

Przyjmujemy macierz funkcji kształtu w postaci

$$\mathbf{N} = [N_1 N_2], \quad (11)$$

oraz aproksymację przemieszczenia  $u(x)$ , przyrostu przemieszczenia  $\Delta u(x)$  i wariacji przyrostu przemieszczenia  $\delta \Delta u(x)$  danych zależnościami

$$u = \mathbf{Nq} = N_1 \cdot q_1 + N_2 \cdot q_2, \quad \Delta u = \mathbf{N}\Delta \mathbf{q} = N_1 \cdot \Delta q_1 + N_2 \cdot \Delta q_2, \quad \delta \Delta u = \mathbf{N}\delta \Delta \mathbf{q} = N_1 \cdot \delta \Delta q_1 + N_2 \cdot \delta \Delta q_2. \quad (12)$$

Równanie (6) ma obecnie postać

$$\int_{V^0} (\delta \Delta e) \cdot E \cdot \Delta e \, dV^0 = (\delta \Delta \mathbf{q})^T \mathbf{k}_L \Delta \mathbf{q}, \quad (13)$$

$$(\delta \Delta \mathbf{q})^T \mathbf{k}_L \Delta \mathbf{q} = (\delta \Delta \mathbf{q})^T \begin{bmatrix} k_{L11} & k_{L12} \\ k_{L21} & k_{L22} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{q} = \delta \Delta q_1 \Delta q_1 \cdot k_{L11} + \delta \Delta q_1 \Delta q_2 \cdot k_{L12} + \delta \Delta q_2 \Delta q_1 \cdot k_{L21} + \delta \Delta q_2 \Delta q_2 \cdot k_{L22}, \quad (14)$$

i wykorzystując (12) otrzymamy

$$\begin{aligned} \Delta e &= \Delta u' + u' \cdot \Delta u' = N_{1'} \cdot \Delta q_1 + N_{2'} \cdot \Delta q_2 + (N_{1'} \cdot q_1 + N_{2'} \cdot q_2) \cdot (N_{1'} \cdot \Delta q_1 + N_{2'} \cdot \Delta q_2), \\ \delta \Delta e &= \delta \Delta u' + u' \cdot \delta \Delta u' = N_{1'} \cdot \delta \Delta q_1 + N_{2'} \cdot \delta \Delta q_2 + (N_{1'} \cdot q_1 + N_{2'} \cdot q_2) \cdot (N_{1'} \cdot \delta \Delta q_1 + N_{2'} \cdot \delta \Delta q_2), \end{aligned} \quad (15)$$

Wykorzystując (15) w (13), po uporządkowaniu możemy napisać

programming language [2], supporting operations that employ regular expressions [3].

Calculation procedure will be explain on the simple example of the computation of the incremental stiffness matrix for bar element, Fig. 1b, with two degrees of freedom

Shape function matrix has the form

and the displacement function  $u(x)$ , displacement increment  $\Delta u(x)$  and variation of displacement increment  $\delta \Delta u(x)$  can be written

Equation (6) takes now the forms

and using (12) we have

Now, after substitution (15) into (13) the following expression is obtained

$$\begin{aligned} (\delta \Delta \mathbf{q})^T \mathbf{k}_L \Delta \mathbf{q} &= \delta \Delta q_1 \Delta q_1 \int_{V^0} E \cdot N_{1'}^2 (1 + N_{1'} \cdot q_1 + N_{2'} \cdot q_2)^2 \, dV^0 + \delta \Delta q_1 \Delta q_2 \int_{V^0} E \cdot N_{1'} N_{2'} (1 + N_{1'} \cdot q_1 + N_{2'} \cdot q_2)^2 \, dV^0 + \\ &+ \delta \Delta q_2 \Delta q_1 \int_{V^0} E \cdot N_{1'} N_{2'} (1 + N_{1'} \cdot q_1 + N_{2'} \cdot q_2)^2 \, dV^0 + \delta \Delta q_2 \Delta q_2 \int_{V^0} E \cdot N_{2'}^2 (1 + N_{1'} \cdot q_1 + N_{2'} \cdot q_2)^2 \, dV^0. \end{aligned} \quad (16)$$

Należy zwrócić uwagę, że przemieszczenie  $u(x)$  jest funkcją tylko zmiennej  $x$ , co pozwoli nam wygodnie policzyć składniki (16), roziterowując całkę na dwie całki: po powierzchni i po długości elementu. Możemy napisać

It can be noting that displacement function  $u(x)$  and the shape functions depends only on  $x$  and is very easy to calculate necessary integrals. It can be written

$$\begin{aligned} (\delta \Delta \mathbf{q})^T \mathbf{k}_L \Delta \mathbf{q} &= \delta \Delta q_1 \Delta q_1 \cdot EA \int_L N_{1'}^2 (1 + N_{1'} \cdot q_1 + N_{2'} \cdot q_2)^2 \, dl + \delta \Delta q_1 \Delta q_2 \cdot EA \int_L N_{1'} N_{2'} (1 + N_{1'} \cdot q_1 + N_{2'} \cdot q_2)^2 \, dl + \\ &+ \delta \Delta q_2 \Delta q_1 \cdot EA \int_L N_{1'} N_{2'} (1 + N_{1'} \cdot q_1 + N_{2'} \cdot q_2)^2 \, dl + \delta \Delta q_2 \Delta q_2 \cdot EA \int_L N_{2'}^2 (1 + N_{1'} \cdot q_1 + N_{2'} \cdot q_2)^2 \, dl. \end{aligned} \quad (17)$$

Wprowadzając funkcje kształtu i ich pochodne w postaci

$$\mathbf{N} = \left[ 1 - \frac{x}{l} \quad \frac{x}{l} \right], \quad \mathbf{N}' = \left[ -\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l} \right], \quad (18)$$

otrzymamy ostatecznie, po scałkowaniu (17) po długości elementu

in equation (17) gives the formula (19)

$$\begin{aligned} (\delta \Delta \mathbf{q})^T \mathbf{k}_L \Delta \mathbf{q} &= \delta \Delta q_1 \Delta q_1 \cdot EA \frac{(-l + q_1 - q_2)^2}{l^3} + \delta \Delta q_1 \Delta q_2 \cdot EA \frac{(l - q_1 + q_2)^2}{l^3} + \\ &+ \delta \Delta q_2 \Delta q_1 \cdot EA \frac{(l - q_1 + q_2)^2}{l^3} + \delta \Delta q_2 \Delta q_2 \cdot EA \frac{(-l + q_1 - q_2)^2}{l^3}. \end{aligned} \quad (19)$$

Porównując (19) z (14) mamy końcowy wynik

The final result of computations can be receive by comparison equations (19) and (14)

$$k_{L11} = EA \frac{(l - q_1 + q_2)^2}{l^3}, \quad k_{L12} = EA \frac{(l - q_1 + q_2)^2}{l^3}, \quad k_{L21} = EA \frac{(l - q_1 + q_2)^2}{l^3}, \quad k_{L22} = EA \frac{(l - q_1 + q_2)^2}{l^3}. \quad (20)$$

W analogiczny sposób można obliczyć wzory na elementy macierzy geometrycznej  $\mathbf{k}_\sigma$  i wektora sił wewnętrznych  $\mathbf{f}$ .

W realizacji komputerowej, opisane kroki procedury były wykonywane automatycznie. Na rys. 2a. pokazano plik tekstowy z symbolicznie zapisanymi równaniami geometrycznymi belkowego elementu cienkościennego w systemie MATLAB, które są danymi wejściowymi do dalszych obliczeń. Symbole  $\mathbf{e11}$ ,  $\mathbf{e12}$  i  $\mathbf{e13}$  są oznaczeniami odkształceń, odpowiednio  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\gamma_{xy}$  i  $\gamma_{xz}$ .

Procedura obejmowała następujące kroki:

In the similar way, the initial stress matrix  $\mathbf{k}_\sigma$  and the internal force vector  $\mathbf{f}$  can be calculated.

In the computer implementation of the procedure, particular steps were performed automatically. In the Fig. 2a. text file with the geometrical equations is shown, which are the input for further calculations. Symbols  $\mathbf{e11}$ ,  $\mathbf{e12}$  and  $\mathbf{e13}$  are used to denote strains, respectively  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\gamma_{xy}$  i  $\gamma_{xz}$ .

The following steps of the procedure are:

- calculating the strains increment vector components (MATLAB),

- obliczenie wektora przyrostów odkształceń (MATLAB),
- podział wektora przyrostów na część liniową i nieliniową i poszukiwanie wyrażeń związanych z charakterystykami geometrycznymi przekroju poprzecznego belki (PERL),
- podstawienie wzorów interpolacyjnych i całkowanie po długości elementu (MATLAB),
- wyszukiwanie i grupowanie wyrażeń korespondujących z elementami składowymi macierzy sztywności (PERL).

- analysis of the text file containing strains increment vector, which leads to point out linear and quadratic components (PERL),
- substitution of the displacement interpolation formulas and integrating over the length of the element (MATLAB),
- search and group of the expressions which correspond with the adequate elements of the stiffness matrix (PERL).

```

e11 =
dlux-y*d2uy-z*d2uz+d2fx*omega+1/2*d1uy^2-z*d1uy*d1fx+Zs*d1uy*d1fx+1/2*z^2
d1fx^2+Zs+1/2*Zs^2*d1fx^2+1/2*d1uz^2+y*d1uz*d1fx-y*s*d1uz*d1fx+1/2*y^2
d1fx^2+Ys+1/2*Ys^2*d1fx^2-1/2*y*d2uz*fx-1/2*y*d1uz*d1fx+1/2*z*d2uy*fx+1/
d1fx+1/2*y*s*d2uz*fx+1/2*Ys*d1uz*d1fx-1/2*Zs*d2uy*fx-1/2*Zs*d1uy*d1fx

e12 =
1/2*d1fx*domegax-1/2*z*d1fx+1/2*Zs*d1fx-1/2*d1ux*d1uy+1/2*d1ux*d1fx*domeg
d1uy*d2uy-1/2*y*d2uy*d1fx*domegax+1/2*z*d1uy*d2uz-1/2*z*d2uz*d1fx*domeg
fx*omega*d1uy+1/2*d2fx*omega*d1fx*domegax+1/2*d1uz*fx+1/2*y*fx*d1fx-1/2*
x-1/4*d1uz*fx-1/2*y*d1uy*d2uy-1/2*y*fx*d1fx-1/4*z*d2uy*d1uz-1/2*z*d1uy*d
s*fx*d1fx

e13 =
1/2*d1fx*domegax+1/2*y*d1fx-1/2*Ys*d1fx-1/2*d1ux*d1uy+1/2*d1ux*d1fx*domeg
d2uy*d1uz-1/2*y*d2uy*d1fx*domegax+1/2*z*d1uy*d2uz-1/2*z*d2uz*d1fx*domeg
fx*omega*d1uz+1/2*d2fx*omega*d1fx*domegax-1/2*d1uy*fx+1/2*z*fx*d1fx-1/2*
x+1/4*d1uz*fx-1/4*y*d2uy*d1uz-1/4*y*d1uy*d2uz-1/2*z*d1uz*d2uz-1/2*z*fx*d
s*fx*d1fx
    
```

```

kl_1_11 = E*Area/d1;
kl_2_11 = 1.0/15.0*G*Area*(-3.0*q9*q13*d1+18.0*(q2*q2)+2.0*(q6*q6)*d1*
q9*q9)-q6*q13*(d1*d1)+2.0*(q13*q13)*(d1*d1)-36.0*q2*q9+3.0*q2*q13*d1+3.
-3.0*q6*q9*d1)/(d1*d1);
kl_3_11 = 1.0/15.0*G*Mc22*(-q7*q14*(d1*d1)+2.0*(q14*q14)*(d1*d1)+3.0*q4
0*q11*q14*d1+3.0*q7*q4*d1-3.0*q7*q11*d1-36.0*q4*q11+2.0*(q7*q7)*(d1*d1)
q4)+18.0*(q11*q11)/(d1*d1);
kl_4_11 = -1.0/15.0*G*Mc22*(3.0*q6*q4*d1+4.0*q6*q7*(d1*d1)-3.0*q13*q11*d
d1*d1)+36.0*q2*q4-36.0*q2*q11+36.0*q9*q11-q13*q7*(d1*d1)+3.0*q2*q7*d1+3
d1-36.0*q9*q4+4.0*q13*q14*(d1*d1)-3.0*q9*q14*d1+3.0*q2*q14*d1-3.0*q6*q1
9*q7*d1)/(d1*d1);
kl_5_11 = 1.0/15.0*G*Area*(2.0*(q12*q12)*(d1*d1)+2.0*(q5*q5)*(d1*d1)+3.
1-36.0*q3*q10+18.0*(q3*q3)*(d1*d1)+18.0*(q10*q10)-3.0*q5*q3*d1-3
d1+3.0*q10*q12*d1)/(d1*d1);
kl_6_11 = 1.0/15.0*G*Mc22*(-36.0*q4*q11-q7*q14*(d1*d1)-3.0*q7*q11*d1+2.
(d1*d1)-3.0*q11*q14*d1+18.0*(q11*q11)+2.0*(q14*q14)*(d1*d1)+3.0*q4*q14
4*q4+3.0*q7*q4*d1)/(d1*d1);
kl_7_11 = -1.0/15.0*G*Mc22*(-3.0*q4*q12*d1+3.0*q7*q3*d1+3.0*q11*q12*d1+q
d1)+q7*q12*(d1*d1)+36.0*q11*q10-36.0*q4*q10-4.0*q14*q12*(d1*d1)-3.0*q4*
q11*q5*d1-4.0*q7*q5*(d1*d1)-36.0*q11*q3+3.0*q14*q3*d1-3.0*q14*q10*d1-3.
1+36.0*q4*q3)/(d1*d1);
kl_1_12 = -1.0/20.0*E*Area*(-12.0*q9*q13*d1+q6*d1+12.0*q2+2s*q7*d1+Zs*q
*Zs*q11+12.0*Zs*q4)/(d1*d1);
kl_2_12 = -1.0/20.0*E*Area*(-12.0*q9*q13*d1+q6*d1+12.0*q2+2s*q7*d1+Zs*q
*Zs*q11+12.0*Zs*q4)/(d1*d1);
kl_3_12 = 1.0/10.0*G*Area*(-12.0*q1*q9-12.0*q8*q2+q1*q6*d1+12.0*q1*q2-q
*q13*d1+q1*q13*d1+12.0*q8*q9)/(d1*d1);
kl_4_12 = -1.0/10.0*G*Mc22*(12.0*q8*q11+12.0*q1*q4-q8*q7*d1+q1*q14*d1-12
12.0*q8*q4-q8*q14*d1+q1*q7*d1)/(d1*d1);
kl_5_12 = -2.0/5.0*G*Mc22*(-3.0*q7*q4-3.0*q11*q14+3.0*q4*q14+3.0*q7*q1
)*d1+(q7*q7*d1)/(d1*d1);
kl_6_12 = 1.0/5.0*G*Mc22*(2.0*q14*q6*d1+9.0*q14*q2-9.0*q14*q9-9.0*q7*q2
    
```

Rys. 2. Pliki tekstowe z: a) równaniami geometrycznymi, b) końcowymi wzorami na elementy macierzy sztywności przyrostowej  
 Fig. 2. Text files: a) geometrical equations, b) final formulas for components of the incremental stiffness matrix

Takie postępowanie doprowadza do ostatecznych wzorów na macierz sztywności w formie pokazanej na rys. 2b. Zsumowanie wartości wyrażeń (oznaczanych przez  $kl_{k_{ij}}$  gdzie  $k$  oznacza kolejny numer wyrażenia, a wartości  $i$  i  $j$  oznaczają położenie w macierzy), prowadzi do ostatecznych wartości elementów macierzy sztywności przyrostowej.

4. Zakończenie

Procedura obliczania macierzy sztywności stycznej i wektora sił wewnętrznych dla cienkościennego elementu belkowego zaimplementowano w autorskim programie komputerowym AmFEM pierwszego autora. Rozwiązanie wielu przykładów pozwoliło na potwierdzenie efektywności opisanego elementu w analizie statycznej i stateczności płaskich oraz przestrzennych ram cienkościennych o dowolnym przekroju poprzecznym otwartym.

Literatura • References

[1] de Borst R., (1999). *Computational Methods in Non-linear Solid Mechanics*. Delft University of Technology, Delft.  
 [2] d Foy B., (2008). *Perl. Mistrzostwo w programowaniu*. Wydawnictwo HELION, Gliwice.  
 [3] Friedl J.E.F., (2001). *Wyrażenia regularne*. Wydawnictwo HELION, Gliwice.  
 [4] Koczubiej S., (2011). Model powłokowo-belkowy MES w analizie statycznej i stateczności konstrukcji o prętach cienkościennych otwartych. Praca doktorska, Politechnika Świętokrzyska.  
 [5] MATLAB, (2006). *MATLAB R2006b Help*. The MathWorks, Inc.

In Fig. 2b, the example of formulae of incremental stiffness matrix components is shown. The partly expression is marked  $kl_{k_{ij}}$ , where  $k$  is the number of expression and  $i$  and  $j$  define location of the expression in the matrix. Calculations of the all partial expressions and their proper summation leads to the final element values of the incremental stiffness matrix.

4. Conclusions

Procedure of calculation of tangent stiffness matrix and vector of internal forces for the thin-walled beam element has been implemented into AmFEM computer program, developed by the first author. Many examples were successfully performed to indicate the effectiveness of the solution in the static and stability analysis of plane and space thin-walled structures.