

Zastosowanie Uogólnionej Metody Perturbacji Stochastycznej w analizie konstrukcji ciągnowych

Cable structure analysis involving the application of the Generalized Stochastic Perturbation Method

Jacek Szafran

*Katedra Mechaniki Konstrukcji, Zakład Niezawodności Konstrukcji
Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska, Politechnika Łódzka
Al. Politechniki 6, 90-924 Łódź
e-mail: jacek.szafran@p.lodz.pl*

*Department of Structural Mechanics, Chair of Structural Safety,
Faculty of Civil Engineering, Architecture and Environmental Engineering, Technical University of Łódź,
Al. Politechniki 6, 90-924 Łódź*

Streszczenie

Tematem niniejszego opracowania jest przedstawienie możliwości analiz numerycznych konstrukcji ciągnowych z parametrami losowymi. Głównym narzędziem przeprowadzonych obliczeń jest Uogólniona Metoda Perturbacji Stochastycznej. Pozwala ona na numeryczne określenie statystyk reakcji poziomych pojedynczych ciągów w zależności od parametrów losowych tj. moduł sprężystości podłużnej lin i wielkość obciążenia. Momenty probabilistyczne odpowiedzi konstrukcji wyznaczone zostały przy pomocy podejścia analitycznego określania reakcji poziomych ciągów dla losowo określonej wartości modułu Younga i obciążenia wzbogaconego perturbacyjną analizą stochastyczną. W obliczeniach wykorzystano system algebry komputerowej MAPLE v.13. Osiągnięte wyniki pozwalają określić wpływ w/w parametrów losowych na wartości tak kluczowego parametru w teorii konstrukcji ciągnowych jakim jest reakcja pozioma. Przedstawiona aplikacja komputerowa może posłużyć analizie niezawodności bardziej złożonych konstrukcji ciągnowych tj. maszty, dźwigiary, przekrycia dachowe lub mosty podwieszane.

Abstract

The main aim of this paper is a presentation of the capabilities of numerical analysis dedicated to cable structures affected by random parameters. Main tool of the analysis carried out is the Generalized Stochastic Perturbation Method. It allows us to determine numerically of statistical data for horizontal reaction of the single cable with respect to random parameters, such as modulus of elasticity of the ropes and magnitude of loading. Central probabilistic moments of the structure responses are calculated using the analytical approach to the determination of the horizontal reactions of the single cable supported by a stochastic perturbation technique. The moments has been obtained for random Young modulus and loading. In analyses computer algebra system MAPLE v.13 was applied. Obtained results allow us to determine influence of the random parameters described above for values of such crucial element in tension structures theory which is horizontal reaction. The computer application described in the paper may be utilized in reliability analysis of much more complex cable structures such as masts, girders, roofs and cable supported bridges.

Słowa kluczowe: konstrukcje ciągnowe, Uogólniona Metoda Perturbacji Stochastycznej, parametry losowe, metody probabilistyczne
Keywords: cable structures, Generalized Stochastic Perturbation Method, random parameters, probabilistic methods

1. Wstęp

W praktyce inżynierskiej a także badaniach naukowych coraz większe zainteresowanie budzą szeroko rozumiane konstrukcje ciągnowe. Ich podstawowe zalety zostały gruntownie omówione w pracach [3, 4], a do których bez wątplenia należy mały ciężar konstrukcji wynikający z wysokiej wytrzymałości materiału i występowania tylko naprężeń rozciągających w elementach linowych. Obok niewątpliwych zalet tego typu konstrukcji istnieje również kilka przyczyn, które powodują, że ich zastosowanie wydaje się być ograniczone. Zaliczyć do nich możemy problemy wykonawcze (głównie z zakotwieniem ciągów w fundamentach i ustaleniem właściwej geometrii ustroju) ale przede wszystkim trudności obliczeniowe i projektowe.

Jednym z podstawowych problemów w analizie obliczeniowej ciągów jest prawidłowe przyjęcie współczynnika sprężystości podłużnej liny E . W przypadku konstrukcji

1. Introduction

Cable structures (structures with tension components) are becoming widely considered both in engineering practice and scientific research. Their main advantages are described in publications [3, 4], among which undoubtedly lies the light weight of the structure inferred from high material strength (weight/strength ratio) and sole existence of tensile stresses in cable elements. In addition to the undoubted benefits of this type of constructions, however, there are also several reasons causing their application to be seen as limited. This includes implementation problems on construction site (mainly the anchoring of cables in the foundations and determination of the appropriate geometry of the system) and, above all, computational analysis.

One of the problems in cable elements computational analysis is a proper adoption of the modulus of elasticity factor for structural cables. In the case of mast structures this problem

masztowych problem ten został omówiony w pracy [5]. W przypadku lin nie poddanych wstępnemu przeciągnięciu (lub też gdy proces ten nie został wykonany w pełnym zakresie) wartości tego parametru mogą mieć duży rozrzut. Można zatem uznać, że również nośność takiego elementu rozciąganego będzie losowa. Inne przypadki losowości dla stalowych elementów rozciąganych określone zostały w pracy [1]. Fakt ten spowodował przyjęcie modułu sprężystości jako parametru losowego w późniejszej analizie obliczeniowej.

Jednym z podstawowych przypadków obciążeniowych pojedynczych cięgien jest wiatr i oblodzenie. Obydwa te parametry z całą pewnością możemy uznać jako losowe. Znane są przypadki kiedy nagły wzrost grubości (a co za tym idzie również ciężaru) oblodzenia na elementach kablowych spowodował szereg awarii a nawet katastrof budowlanych. Narażony na to jest przede wszystkim sektor energetyczny i jego linie przesyłowe.

2. Uogólniona Metoda Perturbacji Stochastycznej

Wprowadźmy zmienną losową $b=b(\omega)$ wraz z funkcją gęstości prawdopodobieństwa $p(b)$. Probabilistyczny moment centralny rzędu m może być zdefiniowany jako:

$$\mu_m(b) = \int_{-\infty}^{+\infty} (b - E[b])^m p_b(x) dx. \tag{1}$$

Podstawowym założeniem metody stochastycznej perturbacji opisanej w pozycji [2] jest rozwinięcie zmiennych losowych i funkcji stanu danego problemu w szereg Taylora w otoczeniu ich wartości oczekiwanych używając parametru $\epsilon > 0$ zwanego parametrem perturbacji. W przypadku losowej wielkości $e=e(b)$ możemy zapisać, że:

$$e = e^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \epsilon^n \frac{\partial^n e}{\partial b^n} (\Delta b)^n, \tag{2}$$

gdzie $\epsilon \Delta b = \epsilon(b - b^0)$ oznacza pierwszą wariację b w otoczeniu b^0 , natomiast symbol $(.)^0$ określa wartość badanej funkcji określoną dla wartości oczekiwanej b^0 . Przeanalizujmy wartości oczekiwane funkcji $f(b)$ zdefiniowanej analogicznie do zapisu (1) poprzez rozwinięcie w szereg Taylora z parametrem ϵ :

$$E[f(b)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(b) p(b) db = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f^0(b) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \epsilon^n \frac{\partial^n f}{\partial b^n} \Delta b^n \right) p(b) db. \tag{3}$$

Z numerycznego punktu widzenia, rozwinięcie zaprezentowane w równaniu (1) jest wykonane poprzez sumowanie skończonej liczby elementów wraz z określonymi granicami w procesie całkowania. Analityczne wyprowadzenie momentów probabilistycznych dla funkcji odpowiedzi konstrukcji jest stosunkowo łatwe do określenia i dla rozwinięcia ósmego rzędu przyjmuje następującą postać:

$$E[f(b)] = f^0(b) \Big|_{b=b^0} + \frac{1}{2} \epsilon^2 \mu_2(b) \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} \Big|_{b=b^0} + \dots + \frac{1}{8!} \epsilon^8 \mu_8(b) \frac{\partial^8 f}{\partial b^8} \Big|_{b=b^0}, \tag{4}$$

gdzie składniki nieparzyste w przypadku gaussowskich zmiennych losowych są opuszczane. Dzięki wyżej opisanemu rozwinięciu wyników losowych, a także poprawnemu przyjęciu parametrów rozkładu możemy uzyskać probabilistyczne momenty losowe dowolnych rzędów.

Możemy również określić takie parametry statystyczne jak: kurtoza κ , skośność β i współczynnik wariancji α :

$$\kappa(f(b)) = \frac{\mu_4(f(b))}{\sigma^4(f(b))} - 3, \quad \beta(f(b)) = \frac{\mu_3(f(b))}{\sigma^3(f(b))}, \quad \alpha(f(b)) = \frac{\sigma(f(b))}{E[f(b)]}, \tag{5}$$

gdzie: μ_3, μ_4 oznacza odpowiednio trzeci i czwarty moment

was discussed at the work [5]. Considering cable elements not subjected to preliminary pulling (or when this process was not performed in the full extent), the values of this parameter can have a quite large dispersion. Taking this fact into account, we can conclude that carrying capacity of that stretched element is random as well. Other cases of the randomness for structural steel tension elements were described in publication [1]. This fact induced acceptance of the module of the elasticity as the random parameter in proceeding computational analysis.

In design process for cable structures, we frequently have to consider two load cases, namely wind and ice. Both of these parameters we can recognize as a random ones. In engineering practice there are known cases when the sudden increase in ice thickness (and consequently in its weight) on cable elements caused the series of failures or even construction disasters. Energy sector and its transmission lines are most exposed to this kind of thread.

2. Generalized Stochastic Perturbation Method

Let us introduce the random variable $b=b(\omega)$ with its probability density function as $p(b)$. The central probabilistic moment of the order of m is defined as:

The basic idea of the stochastic perturbation approach described widely in the book [2] is to expand all the input variables and the state functions of the given problem via Taylor series about their spatial expectations using some small parameter $\epsilon > 0$. In case of some random quantity $e=e(b)$, the following expression is employed:

where $\epsilon \Delta b = \epsilon(b - b^0)$ is the first variation of b about b^0 , where symbol $(.)^0$ represents the function value $(.)$ taken at the expectation b^0 . Let us analyze further the expected values of any state function $f(b)$ defined according to Eq. (1) by its expansion via Taylor series with a given small parameter ϵ as follows:

From the numerical point of view, the expansion introduced by equation (1) is carried out for the summation over the finite number of components and with finite limits during the integration process. Now, let me focus on an analytical derivation of the probabilistic moments for the structural response function. It is easy to prove that the general 8th order expansion results in the formula:

where the odd components in case of Gaussian variables are dropped off. Thanks to such an extension of the random output, any desired efficiency of the expected values as well as higher probabilistic moments can be achieved by an appropriate choice of the distribution parameters.

Finally, one may recover the kurtosis κ , skewness β and coefficient of variance α as:

where: μ_3, μ_4 denotes third and fourth central probabilistic

centralny natomiast σ odchylenie standardowe.

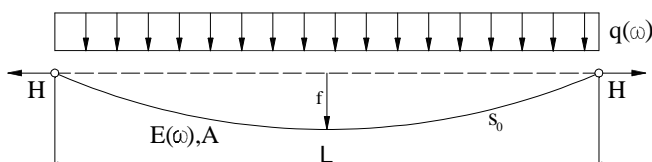
moments respectively and σ stands for standard deviation.

3. Eksperymenty numeryczne

Wykonano dwa niezależne eksperymenty numeryczne, które dotyczą wpływu losowej wartości współczynnika sprężystości liny E oraz losowej wartości obciążenia q na reakcję poziomą H pojedynczego elementu ciągnowego (oba parametry traktowane jako gaussowska zmienna losowa). Schemat statyczny analizowanej konstrukcji zaprezentowany został na Rys. 1.

3. Numerical experiments

Two independent numerical experiments were performed. They are entirely devoted to the observation of influence of random modulus of elasticity and random magnitude of uniform loading for horizontal force H of single cable element (both treated as a Gaussian random variable). The static scheme of the analysed structure is given in Fig.1.



Rys. 1. Schemat statyczny analizowanego pojedynczego elementu ciągnowego.
Fig. 1. Static scheme of the analyzed single cable element.

Podstawowe parametry przyjęte do obliczeń to: rozpiętość ciągną $L=70,0$ m, długość początkowa ciągną $s_0=71,0$ m, pole przekroju metalicznego ciągną $A=3$ cm², zmiana temperatury $\Delta T=50^\circ\text{C}$, współczynnik rozszerzalności termicznej $\alpha_T=0,000012$ 1/K, wartość oczekiwana losowego modułu Younga $E[E]=150$ GPa, wartość oczekiwana losowego obciążenia $E[q]=4,0$ kN/m.

Main parameters incorporated into performed calculations: cable span length $L=70,0$ m, initial length of the cable $s_0=71,0$ m, cross sectional area of the cable metallic part $A=3$ cm², change of temperature $\Delta T=50^\circ\text{C}$, the thermal expansion coefficient $\alpha_T=0,000012$ 1/K, the expected value of the random Young modulus $E[E]=150$ GPa, the expected value of the random uniform loading.

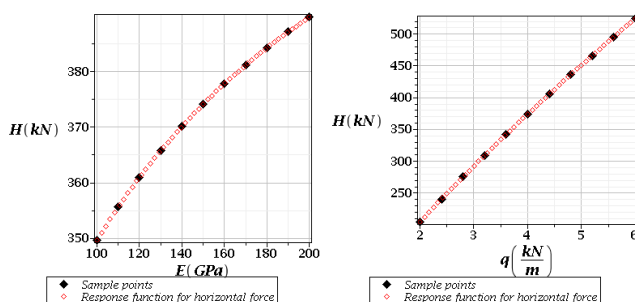
Równanie dla pojedynczego ciągną pod obciążeniem równomiernie rozłożonym przyjmuje postać podaną w [4, 5]:

The equation for single cable element under uniform loading assumes the form given in [4, 5]:

$$H^3 + H^2 \cdot E(\omega) \cdot A \left[1 - \frac{1}{s_0} (L - \alpha_T \cdot \Delta T \cdot s_0) \right] = \frac{E[E] \cdot A \cdot q(\omega)^2 \cdot L^3}{24s_0} \tag{6}$$

W praktyce projektowej rozwiązanie równania (6) uzyskuje się przy pomocy obliczeń iteracyjnych. W celu uzyskania funkcji odpowiedzi konstrukcji (reakcja pozioma H) wykonano 11 analiz obliczeniowych, dla różnych wartości parametru losowego – odpowiednio współczynnika sprężystości liny i wartości obciążenia. Funkcje odpowiedzi określono przy pomocy programu MAPLE wykorzystując aproksymację Metodą Najmniejszych Kwadratów.

In practice, however, the solution of the equation (6) is obtained via iteration calculations. Numerical determination of the response functions (in respect to horizontal reaction H) is based on 11 computations for different values of the random parameter – modulus of elasticity of the cable and uniform loading respectively. Response functions are plotted with using Least Square Method approximation built in the MAPLE computer system.



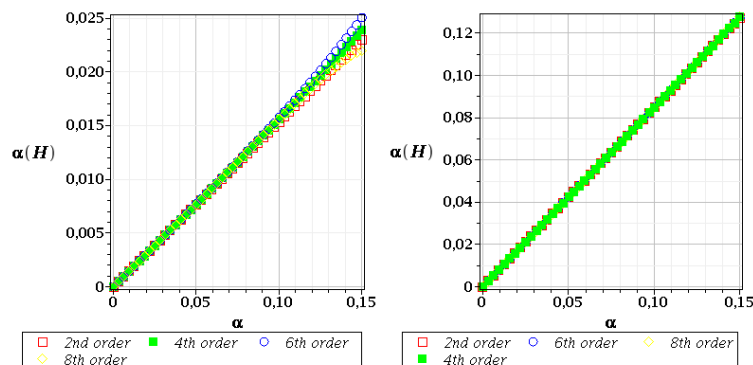
Rys. 2. Funkcje odpowiedzi konstrukcji ze względu na losowy moduł sprężystości E (po lewej) oraz losowego obciążenia q (po prawej).
Fig. 2. Response functions with respect to random modulus of elasticity E (left) and random loading q (right).

Na Rys. 2 zaprezentowane zostały krzywe funkcji odpowiedzi siły poziomej H ze względu na dwa parametry losowe - moduł Younga E (po lewej) i obciążenie q (po prawej). Jak można zauważyć obie funkcje dobrze odzwierciedlają przeprowadzone analizy obliczeniowe (czarne punkty na wykresie oznaczają wyniki 11 obliczeń

In Fig. 2 the response function curves for horizontal reaction R are presented with respect to two random parameters – Young modulus (left) and loading (right). As we can notice, both functions accurately reflect the numerical analyses that have been carried out (marked on the graphs as a black solid diamond signs – 11 sample points) and they pass through all these points

deterministycznych) i przechodzą przez wszystkie w/w punkty bez lokalnych oscylacji, osobliwości – dotyczy to szczególnie obu końców przedziałów obliczeniowych. Funkcja odpowiedzi dla losowej wartości obciążenia jest prawie liniowa co ma decydujący wpływ na zbieżność metody perturbacji i momenty.

without any local oscillations, irregularities and singularities (especially on the both ends of a scale). A response function for the random loading is almost linear what has decisive impact for the particular probabilistic moments of all orders and also for an overall convergence of the perturbation method itself.



Rys. 3. Współczynniki rozproszenia reakcji poziomej H ze względu na losowy moduł sprężystości E (po lewej) oraz losowe obciążenia q (po prawej).

Fig. 3. Coefficients of variation of the horizontal reaction with respect to random modulus of elasticity E (left) and random loading q (right).

Wyjściowy współczynnik wariancji $\alpha(H)$ przedstawiony na Rys. 3 w funkcji wejściowego współczynnika rozproszenia α w pierwszym przypadku obliczeniowym (lewy wykres) nie wykazuje liniowej zależności pomiędzy tymi dwoma charakterystykami. Wzrost wejściowego współczynnika rozproszenia do 15% powoduje 2,5% wzrost współczynnika wyjściowego. Wyższe wartości $\alpha(H)$ uzyskane dla losowego obciążenia (prawy wykres) pokazuje, że ten parametr losowy ma znaczący wpływ na obserwacje reakcji poziomej.

The output coefficient of variation $\alpha(H)$ presented in Fig. 3 as a function of input α for the first case with the random Young modulus (left graph) does not reflect the linear dependence between these two characteristics. An increase of the input coefficient of variation up to 15% returns 2,5 % increase in output α by only. Higher values of $\alpha(H)$ obtained in random loading (Fig. 3, right graph) show that this particular random variable have meaningful influence in the horizontal reaction observations.

4. Wnioski

Na podstawie przeprowadzonych analiz można stwierdzić, że:

- zastosowanie UMPS wraz z metodą funkcji odpowiedzi może być bardzo użytecznym narzędziem w badaniu niezawodności konstrukcji cięgnowych,

- rozbudowanie przedstawionej aplikacji komputerowej dla bardziej złożonych konstrukcji cięgnowych takich jak np. maszty czy mosty jest możliwe. W tym celu należy uzyskać odpowiedź konstrukcji żadanego parametru przy pomocy tradycyjnego podejścia MES a następnie uzyskać statystyki w sposób zaprezentowany w artykule,

- podobne rozważania można przeprowadzić dla ciągów z losową podatnością podpór, z losowym działaniem temperatury itp.

4. Conclusions

On the basis of the performed and discussed analyses, it can be stated that:

- applying GSPM supported by response function method may be very efficient tool for cable structures reliability analyses,

- extending a presented computer application for more complex cable structures like e.g. masts or bridges, is possible. For that purpose we should obtain the response of the structure of the demanded parameter with using traditional approach of FEM and then gather statistics in the way described in the article,

- similar considerations may be derived for other types of randomness, e.g. supports susceptibility, temperature action and etc.

Literatura • References

- [1] Biegus A., (1999), *Probabilistyczna analiza konstrukcji stalowych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa - Wrocław.
- [2] Kamiński M. (2013), *The Stochastic Perturbation Method for Computational Mechanics*. Wiley, Chichester, 2013.
- [3] Pałkowski Sz., (1994), *Konstrukcje cięgnowe*, Wydawnictwo Naukowo Techniczne, Warszawa.
- [4] Pałkowski Sz., (2010), *Konstrukcje stalowe. Wybrane zagadnienia obliczania i projektowania*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [5] Rykaluk K., (2004), *Konstrukcje stalowe. Kominy, wieże, maszty*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.