

## Wymiarowanie zginanych i skręcanych dwuteowników walcowanych Dimensioning of the hot rolled I-shaped beams under the bending and torsion

**Roman Bijak**

*Katedra Mechaniki, Konstrukcji Metalowych i Metod Komputerowych,  
Wydział Budownictwa i Architektury, Politechnika Świętokrzyska  
Al. 1000-lecia P.P. 7, 25-323 Kielce  
e-mail: r.bijak@wp.pl*

### Streszczenie

W pracy porównano dwie metody wymiarowania zginanych i skręcanych dwuteowników walcowanych klasy 1 i 2. Pierwsza z nich wynika ze wzorów przedstawionych w normie [2], dotyczącej wymiarowania konstrukcji wsporczych dźwignic, zaś druga bezpośrednio z normy PN-EN 1993-1-1[1]. Pierwsza metoda uwzględnia teorię skręcania Własowa i wprowadza pojęcie bimomentu. W tym opracowaniu bimoment zastąpiono równoważną parą momentów zginających półki dwuteownika [4]. Jest to dla projektanta pojęciowo łatwiejsze w interpretacji.

### Abstract

Two dimensioning methods of bending and torsion hot rolled I-shaped beams class 1 & 2 are presented in this paper. The first one is based on the formulas presented in [2]. Its related to dimensioning of steel construction of cranes. It accounts to Wlasow's torsion theory and introduces the concept of bimoment. The second one is related to PN-EN 1993-1-1[1]. In this paper the bimoment is replaced by an equivalent pair of bending moment of the I-shaped beam flanges [4]. As this is conceptually easier to interpret and more appropriate for the designer.

*Słowa kluczowe: dwuteowniki walcowane, teoria skręcania Własowa, moment zginający od paczenia.  
Keywords: hot rolled I-shaped beams, Wlasow's torsion theory, warping bending moment.*

### 1. Wymiarowanie elementów zginanych i skręcanych wg normy [2]

Metoda wymiarowania elementów zginanych i skręcanych, przedstawiona w normie [2], dotyczy konstrukcji wsporczych dźwignic. Uwzględnia teorię skręcania Własowa i wprowadza pojęcie bimomentu. W tym opracowaniu bimoment zastąpiono równoważną parą momentów zginających półki dwuteownika [4]. Moment zginający pojedynczą półkę dwuteownika od paczenia przekroju wyznaczamy ze wzoru (1):

$$M_w(x) = \frac{B_w(x)}{h_0} \quad (1)$$

gdzie:  $h_0 = h - t$  (Rys. 1b).

Rozkład bimomentu  $B(x)$ , wg teorii Własowa, opisujemy za pomocą zależności (2) [5]:

$$B_w(x) = -EI_w \varphi^{(2)} \quad (2)$$

gdzie:  $E$  – moduł sprężystości,  $\varphi$  – kąt skręcenia,  $\varphi^{(k)} = \partial^k \varphi / \partial x^k$  – oznaczenie pochodnej,  $I_w$  – wycinkowy moment bezwładności. Podstawiając  $I_w = I_{fz} h_0^2 / 2$  ( $I_{fz} = t b^3 / 12$  – moment bezwładności półki względem osi  $z$ ) do wzorów (1,2) otrzymujemy:

$$M_w(x) = -EI_{fz} \frac{h_0}{2} \varphi^{(2)} \quad (3)$$

W Tabeli 1 zestawiono funkcje kąta skręcenia  $\varphi(x)$  i momentu  $M_w(x)$  dla podparcia widelkowego i schematu statycznego wg rys. 1a. Przyjęto oznaczenia:  $G$  – moduł sprężystości ścinania,  $I_T$  – moment bezwładności skręcania St. Venanta,  $k = \sqrt{GI_T / (EI_w)}$ ,  $T$  – moment skręcający,  $a_1$ ,  $b_1$  i  $L$  wg rys. 1a.

### 1. Dimensioning of the bending and torsion elements according to norm [2]

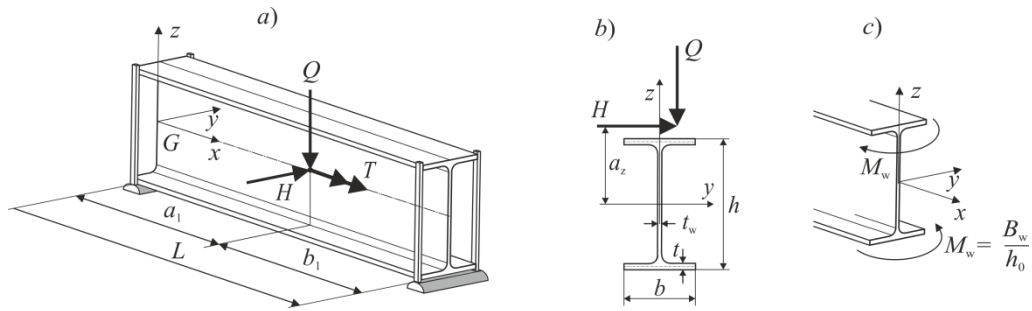
The dimensioning method of the elements under bending and torsion is presented in [2]. It is related to steel construction of the cranes. It takes in consideration Wlasow's torsion theory and introduces the concept of bimoment. In this paper bimoment is replaced by an equivalent pair of bending moments of the I-beam shaped flange [4]. The bending moment for the I-beam flange caused by warping is derived from (1):

where:  $h_0 = h - t$  (Fig. 1b).

The distribution of bimoment  $B(x)$ , according to Wlasow's theory is described by (2) [5]:

where:  $E$  – elasticity modulus,  $\varphi$  – angle of rotation,  $\varphi^{(k)} = \partial^k \varphi / \partial x^k$  – denotation of derivative,  $I_w$  – warping constant. Substituting  $I_w = I_{fz} h_0^2 / 2$  ( $I_{fz} = t b^3 / 12$  – inertial moment of the flange with respect to  $z$ -axis) into equations (1,2) we'll receive:

The functions of rotation angle  $\varphi(x)$  and the  $M_w(x)$  moment for the simply supported and static scheme according to Fig. 1a are presented in Table 1. Adopted is the following notation:  $G$  – shear elasticity modulus,  $I_T$  – St. Venant torsion constant,  $T$  – torque moment,  $k = \sqrt{GI_T / (EI_w)}$ ,  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $L$  as shown in Fig. 1a.



Rys. 1. Schemat statyczny a) obciążenie, b) parametry przekroju poprzecznego, c) moment zginający półki od paczenia przekroju  
 Fig. 1. Static scheme a) loads, b) cross section's parameters, c) warping moment of flange

Tabela 1. Funkcje kąta skręcenia i momentu zginającego  $M_w$  dla schematu statycznego wg rys.1a [5]  
 Table 1. Functions of the torsion angle and the bending moment  $M_w$  for the static scheme, according to Fig. 1a [5]

Left range ( $0 \leq x < a_1$ )	Right range ( $a_1 < x \leq L$ ),
$\varphi(x) = \frac{T}{kGI_T} \left( \frac{b_1}{L} kx - \frac{\sinh kb_1}{\sinh kL} \sinh kx \right)$	$\varphi(x) = \frac{T}{kGI_T} \left[ \frac{a_1}{L} k(L-x) - \frac{\sinh ka_1}{\sinh kL} \sinh k(L-x) \right]$
$M_w(x) = EI_{fz} \frac{h_0}{2} \left( \frac{Tk}{GI_T} \right) \frac{\sinh kb_1}{\sinh kL} \sinh kx$	$M_w(x) = EI_{fz} \frac{h_0}{2} \left( \frac{Tk}{GI_T} \right) \frac{\sinh ka_1}{\sinh kL} \sinh k(L-x)$

Sprawdzenie nośności plastycznej przekroju możemy zapisać za pomocą formuły interakcyjnej (4)[4]:

The proof of cross-section's plasticity capacity can be written with interaction formula (4) [4]:

$$\left[ \frac{M_{y,Ed}}{M_{pl,y,Rd}} \right]^2 + \frac{\bar{M}_{z,Ed}}{M_{pl,z,Rd}} + \frac{M_{w,Ed}}{M_{pl,w,Rd}} \leq 1 \quad (4)$$

Moment zginający przekrój względem obróconej o kąt  $\varphi_d$  osi z wyznaczamy ze wzoru (5)[4]:

Cross-section's bending moment related to rotated at  $\varphi_d$  angle round the z-axis is calculated from the equation (5) [4]:

$$\bar{M}_{z,Ed} = M_{z,Ed} + \varphi_d M_{y,Ed} \quad (5)$$

gdzie:  $\varphi_d$  – kąt skręcenia, obliczony wg wzorów z Tabeli 1 dla obliczeniowego momentu skręcającego  $T_{Ed}$ ,  $M_{z,Ed}$  oraz  $M_{y,Ed}$  – obliczeniowe momenty zginające względem osi z i y. Nośności plastyczne przekroju przy zginaniu wynoszą:

where:  $\varphi_d$  is the rotation angle, calculated from equation shown in Table 1 for the designed torque moment  $T_{Ed}$ ,  $M_{z,Ed}$  and  $M_{y,Ed}$  are the design bending moments with respect to axes z and y. Cross-section capacity at bending are:

$$M_{pl,y,Rd} = W_{pl,y} f_y / \gamma_{M0}, \quad M_{pl,z,Rd} = W_{pl,z} f_y / \gamma_{M0}, \quad M_{pl,w,Rd} = (tb^2 / 4) f_y / \gamma_{M0} \quad (6abc)$$

gdzie:  $W_{pl,y}$ ,  $W_{pl,z}$ ,  $W_{pl,w,z} = tb^2/4$  – wskaźniki plastyczne przekroju oraz półki,  $\gamma_{M0}$  – częściowy współczynnik bezpieczeństwa.

where  $W_{pl,y}$ ,  $W_{pl,z}$ ,  $W_{pl,w,z} = tb^2/4$  – plasticity index of cross-section and flange,  $\gamma_{M0}$  – partial safety coefficient.

Interakcyjną formułę sprawdzenia nośności elementu zginanego i skręcanego możemy zapisać za pomocą wzoru (7) [2,4]:

Interaction formula for checking the bearing capacity of the element can be written with an equation (7) [2,4]:

$$\frac{M_{y,Ed}}{M_{b,Rd}} + \frac{C_{mz} \bar{M}_{z,Ed}}{M_{z,Rd}} + \frac{k_w k_z k_a M_{w,Ed}}{M_{w,Rd}} \leq 1,0 \quad (7)$$

gdzie:

where:

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} W_{pl,y} f_y / \gamma_{M1} \quad M_{z,Rd} = W_{pl,z} f_y / \gamma_{M1} \quad M_{w,Rd} = (tb^2 / 4) f_y / \gamma_{M1} \quad (8abc)$$

We wzorach (8abc) przyjęto oznaczenia:  $\gamma_{M1}$  – częściowy

In equations (8abc) the following notation is adopted:  $\gamma_{M1}$  –

wsp. bezpieczeństwa,  $\chi_{LT}$  – współczynnik zwichrzenia otrzymany na podstawie momentu krytycznego zwichrzenia  $M_{cr}$ .

Pozostałe parametry wyznaczamy ze wzorów (9abc) [2]:

$$k_w = 0,7 - 0,2 \frac{M_{w,Ed}}{M_{w,Rd}}, \quad k_z = 1 - \frac{\bar{M}_{z,Ed}}{M_{z,Rd}}, \quad k_a = \frac{1}{1 - M_{y,Ed}/M_{cr}} \quad (9abc)$$

Oznaczmy przez  $\varphi_k$  kąt skręcenia od charakterystycznego momentu skręcającego  $T_k$ . Przemieszczenie poziome punktu o współrzędnej  $a_z$  (Rys. 1b) od skręcenia przekroju wynosi:

$$\Delta v_A = a_z \varphi_k \quad (10)$$

## 2. Metoda uproszczona [1]

W metodzie uproszczonej zastępujemy moment skręcający parą sił pokazaną na rys. 2b. Moment  $M_{w,Ed}$  zginający półkę dwuteownika względem osi  $z$ , wyznaczamy z wykresu momentów zginających od zastępczego obciążenia poziomego  $P_{Ed}$  (Rys. 2c). Następnie sprawdzamy warunki nośności przekroju (11a) i elementu (11b) wg normy [1]:

$$\frac{M_{y,Ed}}{M_{pl,y,Rd}} + \frac{M_{w,Ed}}{M_{pl,w,Rd}} \leq 1,$$

gdzie:  $k_{yy} = C_{my}$ ,  $k_{zz} = C_{mz}$ ,  $k_{yz} = 0,6k_{zz}$ ,  $k_{zy} = 1$

Przemieszczenie poziome półki obliczamy na podstawie zastępczego obciążenia poziomego  $P_{Ek}$ , wyznaczonego dla obciążeń charakterystycznych.

## 3. Przykład liczbowy

Rozpatrzmy belkę wykonaną z dwuteownika HEB 300 ze stali S235 ( $W_{pl,y} = 1869 \text{ cm}^3$ ,  $W_{pl,z} = 870,1 \text{ cm}^3$ ,  $t = 1,9 \text{ cm}$ ,  $b = 30 \text{ cm}$ ,  $I_z = 8563 \text{ cm}^4$ ,  $I_y = 25170 \text{ cm}^4$ ,  $I_w = 1688 \cdot 10^3 \text{ cm}^6$ ,  $I_T = 185 \text{ cm}^4$ ). Wymiary, obciążenie, siły przekrojowe oraz nośności przekroju i elementu będziemy podawać w kN i m. Na rys. 2a przedstawiono wymiary oraz obciążenie charakterystyczne rozpatrywanej belki.

Obliczeniowy moment skręcający oraz momenty zginające wynoszą odpowiednio:  $T_{Ed} = 6,75$ ;  $M_{y,Ed} = 192$ ;  $M_{z,Ed} = 18,6$ .

Dla przyjętych charakterystyk skrętnych otrzymujemy:  $GI_T = 149,9 \text{ kNm}^2$ ,  $k = 0,65 \text{ [1/m]}$ . Następnie podstawiamy  $L = 5,5$ ;  $a_1 = b_1 = 2,75$  do wzoru na kąt skręcenia (Tabela 1):

$$\varphi_d = \frac{T_{Ed}}{kGI_T} \left( \frac{kL}{4} - \frac{\sinh^2(kL/2)}{\sinh kL} \right) = \frac{6,75}{0,65 \times 149,9} \left( \frac{0,65 \times 5,5}{4} - \frac{\sinh^2(0,65 \times 5,5/2)}{\sinh(0,65 \times 5,5)} \right) = 0,0292 \text{ rad} \quad (12)$$

Ze wzoru (5) wyznaczamy:

$$\bar{M}_{z,Ed} = 18,6 + 0,0292 \times 192 = 24,2 \text{ kNm} \quad (13)$$

Moment bezwładności i sztywność na zginanie pojedynczej półki wynoszą odpowiednio:  $I_{fc} = 4275 \text{ cm}^4$ ,  $EI_{fc} = 8977 \text{ kNm}^2$ . Podstawiając powyższe dane do wzoru z Tab. 1 ( $h_0 = 0,281 \text{ m}$ ) dla  $x = L/2$  otrzymujemy:

$$M_{w,Ed} = 8977 \frac{0,281}{2} \left( \frac{6,75 \times 0,65}{149,9} \right) \frac{\sinh^2(0,65 \times 5,5/2)}{\sinh(0,65 \times 5,5)} = 17,45 \text{ kNm} \quad (14)$$

Nośności obliczeniowe przekroju ( $\gamma_{M0} = 1[1]$ ) wynoszą:

partial safety coefficient,  $\chi_{LT}$  – lateral buckling coefficient derived from the lateral buckling moment  $M_{cr}$ .

Remaining parameters were determined from the eq. (9abc) [2]:

Let's denote as  $\varphi_k$  the rotation angle from the characteristic torque moment  $T_k$ . Additional lateral displacement's at point of  $a_z$  coordinate (Fig. 1b) from cross-section torsion is given by:

## 2. Simplified method [1]

Using simplified method, we'll have to substitute the torque moment by pair of forces shown in Fig. 2b. The moment  $M_{w,Ed}$  which is bending the I-beam flange with respect to  $z$  axis is determined from the graph of bending moments for the lateral loads  $P_{Ed}$  (Fig. 2c). Next we'll have to check, if the capacity for the section (11a) and element (11b) complies with the norm [1]:

$$\begin{cases} k_{yy} \frac{M_{y,Ed}}{M_{b,Rd}} + k_{yz} \frac{M_{w,Ed}}{M_{w,Rd}} \leq 1,0 \\ k_{zy} \frac{M_{y,Ed}}{M_{b,Rd}} + k_{zz} \frac{M_{w,Ed}}{M_{w,Rd}} \leq 1,0 \end{cases} \quad (11ab)$$

where:  $k_{yy} = C_{my}$ ,  $k_{zz} = C_{mz}$ ,  $k_{yz} = 0,6k_{zz}$ ,  $k_{zy} = 1$

The calculation of lateral displacement of the flange is based on equivalent lateral load  $P_{Ek}$ , which is determined for characteristic loads.

## 3. Numerical example

Let's consider an I-beam HEB300 made from steel S235 ( $W_{pl,y} = 1869 \text{ cm}^3$ ,  $W_{pl,z} = 870,1 \text{ cm}^3$ ,  $t = 1,9 \text{ cm}$ ,  $b = 30 \text{ cm}$ ,  $I_z = 8563 \text{ cm}^4$ ,  $I_y = 25170 \text{ cm}^4$ ,  $I_w = 1688 \cdot 10^3 \text{ cm}^6$ ,  $I_T = 185 \text{ cm}^4$ ). Dimensioning, loads, section's forces and load carrying capacity of the section and the element will be given in kN and m. The dimensions and characteristic load of the I-beam mentioned above is shown at Fig. 2a.

Designed torque moment and the bending moment are respectively:  $T_{Ed} = 6,75$ ;  $M_{y,Ed} = 192$ ;  $M_{z,Ed} = 18,6$ .

For the adopted torsional characteristics we'll obtain:  $GI_T = 149,9 \text{ kNm}^2$ ,  $k = 0,65 \text{ [1/m]}$ . Next we'll substitute  $L = 5,5$ ;  $a_1 = b_1 = 2,75$  in the equation describing torsion angle (Table 1):

From the equation (5) we'll determine:

For the single flange the moment of inertia and the bending rigidity are respectively:  $I_{fc} = 4275 \text{ cm}^4$ ,  $EI_{fc} = 8977 \text{ kNm}^2$ . Switching in the above data in the equation from Table 1 ( $h_0 = 0,281 \text{ m}$ ) for  $x = L/2$  we'll get:

The capacity of the cross section ( $\gamma_{M0} = 1[1]$ ) are the

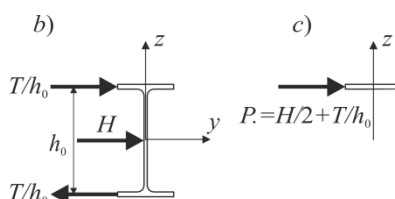
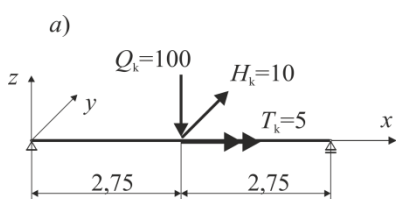
$M_{pl,y,Rd} = 439,2$ ;  $M_{pl,z,Rd} = 204,5$ ;  $M_{pl,w,Rd} = 100,5$ . Natomiast w przypadku sprawdzania nośności elementu mamy ( $\gamma_{M1}=1[1]$ ):  $M_{cr} = 1049$ ;  $\chi_{LT} = 0,895$ ;  $M_{b,Rd} = 393,1$ ;  $M_{z,Rd} = 204,5$ ;  $M_{w,Rd} = 100,5$ ;  $k_{\alpha} = 1,224$ ;  $k_z = 0,882$ ;  $k_w = 0,665$  oraz  $C_{mz} = 0,9$ .

Podstawiając powyższe dane do wzorów (4,7) otrzymujemy:

$$\left[ \frac{192}{439,2} \right]^2 + \frac{24,2}{204,5} + \frac{17,45}{100,5} = 0,483 \leq 1, \quad \frac{192}{393,1} + \frac{0,9 \times 24,2}{204,5} + \frac{0,665 \times 0,882 \times 1,224 \times 17,45}{100,5} = 0,72 \leq 1,0 \quad (15ab)$$

Kąt skręcenia w przypadku obciążenia momentem skręcającym  $T_k = 5$  kNm wynosi  $\phi_k = 0,0217$  rad. Przemieszczenie poziome punktu o współrzędnej  $a_z$  (Rys. 1b) obliczamy ze wzoru (16):

$$v_A = \frac{H_k L^3}{48EI_z} + a_z \phi_k = 1,9 + 190 \times 0,0217 = 6 \text{ mm} \quad (16)$$



Rys. 2. Dane do przykładu liczbowego a) schemat statyczny, b) zastępcze siły od momentu skręcającego, c) zginanie półki.  
 Fig. 2. Data for numerical example: a) statical scheme, b) equivalent forces from torque moment c) bending of the flange

W metodzie uproszczonej najpierw wyznaczamy zastępczą siłę poziomą  $P_{Ed}$  działającą na półkę dwuteownika (Rys. 2d), a następnie moment zginający od tego obciążenia:

$$P_{Ed} = \frac{H_{Ed}}{2} + \frac{T_{Ed}}{h_0} = \frac{13,5}{2} + \frac{6,75}{0,281} = 30,8 \text{ kN},$$

Wykorzystując wzory (11ab) sprawdzamy warunki nośności przekroju i elementu :

$$\frac{192}{439,2} + \frac{42,35}{100,5} = 0,86 \leq 1,$$

Poziome przemieszczenie górnej półki wyznaczamy dla siły poziomej od obciążeń charakterystycznych:

$$P_k = \frac{H_k}{2} + \frac{T_k}{h_0} = \frac{10}{2} + \frac{5}{0,281} = 22,8 \text{ kN},$$

gdzie:  $I_{z_c}$  – moment bezwładności i pojedynczej półki względem osi z.

following:  $M_{pl,y,Rd} = 439,2$ ;  $M_{pl,z,Rd} = 204,5$ ;  $M_{pl,w,Rd} = 100,5$ . However, in case of validation the element's capacity we'll have ( $\gamma_{M1} = 1[1]$ ):  $M_{cr} = 1049$ ;  $\chi_{LT} = 0,895$ ;  $M_{b,Rd} = 393,1$ ;  $M_{z,Rd} = 204,5$ ;  $M_{w,Rd} = 100,5$ ;  $k_{\alpha} = 1,224$ ;  $k_z = 0,882$ ;  $k_w = 0,665$  oraz  $C_{mz} = 0,9$ .

Taking the above data into equations (4,7) we'll get:

In case characteristic torque moment  $T_k = 5$  kNm the torsion angle is equal to  $\phi_k = 0,0217$  rad. The lateral displacement of point at  $a_z$  coordinate (Fig. 1b) we'll calculate from the equation (16):

With simplified method we first determine the equivalent lateral force  $P_{Ed}$  acting on the flange of an I-beam (Fig. 2c) . Next we calculate the bending moment caused by this load:

$$M_{w,Ed} = \frac{P_{Ed} L}{4} = \frac{30,8 \times 5,5}{4} = 42,35 \text{ kNm} \quad (17ab)$$

Using equations (11ab) we'll check the cross-section's and element's capacity:

$$\left\{ \begin{aligned} 0,9 \frac{192}{393,1} + 0,54 \frac{42,35}{100,5} &= 0,67 \leq 1,0 \\ \frac{192}{393,1} + 0,9 \frac{42,35}{100,5} &= 0,87 \leq 1,0 \end{aligned} \right. \quad (18ab)$$

For the upper flange we determine next the lateral displacement of horizontal force caused by characteristic loads:

$$v_A = \frac{P_k L^3}{48EI_{z_c}} = \frac{22,8 \times 550^3}{48 \times 21000 \times 4275} \times 10 = 8,8 \text{ mm} \quad (19ab)$$

where:  $I_{z_c}$  – single flange principal moment of inertia about z axes.

**Literatura •References**

[1] PN-EN 1993-1-1:2006. Projektowanie konstrukcji stalowych – Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.  
 [2] PN-EN 1993-6: 2009. Projektowanie konstrukcji stalowych – Część 6: Konstrukcje wsporcze dźwignic.  
 [3] Żmuda J., (2013), *Konstrukcje wsporcze dźwignic*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.  
 [4] Hughes A.F., Iles D.C., Malik A.S. (2011), *Design of steel beams in torsion*, SCI, UK.  
 [5] Rutecki J. (1957), *Wytrzymałość konstrukcji cienkościennych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.