

Wyboczenie przęsłowych ścianek elementów cienkościennych Buckling of internal walls in thin-walled members

Andrzej Szychowski¹

¹*Katedra Mechaniki, Konstrukcji Metalowych i Metod Komputerowych,
Wydział Budownictwa i Architektury, Politechnika Świętokrzyska
Department of Structure Mechanics, Metal Structures and Computer Methods
Faculty of Civil Engineering and Architecture, Kielce University of Technology
Al. 1000-lecia PP 7, 25-323 Kielce
e-mail: aszychow@tu.kielce.pl*

Streszczenie

W stalowych elementach cienkościennych zbudowanych z płaskich ścianek występują przypadki, w których podłużnie sprężyste zamocowana (np. w środkach) ścianka przęsłowa jest ściskana i jednocześnie występuje wzdłużna zmienność naprężeń na jej długości. Ściankę taką można analizować jako cienką płytę przęsłową, sprężyste zamocowaną „przeciw obrotowi” na podłużnych krawędziach podpartych. W pracy przedstawiono wzory aproksymacyjne płytowych współczynników wyboczeniowych (k^*) dla technicznie ważnych rozkładów naprężeń i dowolnych wartości wskaźnika sprężystego utwierdzenia krawędzi podłużnych.

Abstract

In steel thin-walled members built from flat walls, cases are found, in which longitudinally elastically restrained (e.g. in the webs) internal wall is compressed, and at the same time, longitudinal stress variation along its length occurs. Such a wall can be analysed as a thin internal plate, elastically restrained against rotation along the longitudinally supported edges. The paper presents approximation formulas for plate buckling coefficients (k^*) for technically crucial stress distributions and arbitrary values of the index of elastic fixity of longitudinal edges.

*Słowa kluczowe: płyty przęsłowe; wzdłużna zmienność naprężeń; sprężyste zamocowanie; wzory aproksymacyjne.
Key words: internal plates; longitudinal stress variation; elastic restraint; approximation formulas.*

1. Wstęp

W prętowych elementach cienkościennych o ściankach płaskich występują złożone zjawiska lokalne związane z wyboczeniem miejscowym smukłych ścianek przęsłowych. Jednocześnie, w wielu technicznie ważnych przypadkach, analizę stateczności lokalnej tej klasy elementów, można sprowadzić do analizy wyboczenia wydzielonej z segmentu pręta płyty, przy uwzględnieniu warunków sprężystego zamocowania jej krawędzi i wzdłużnego rozkładu naprężeń (rys.1). Segment pręta cienkościennego zdefiniowano w [1] jako odcinek pomiędzy usztywnieniami poprzecznymi (żebami, przeponami itp.) zapewniającymi sztywny kontur przekroju, niezależnie od tworzących się samorzutnie tzw. „linii węzłowych” wyboczenia. Taka definicja jest szczególnie istotna w przypadku wzdłużnej zmienności naprężeń. W tym przypadku powstające na długości segmentu „półfale” wyboczenia mają zmienną długość i malejącą amplitudę [1, 2].

Statecznością elementów cienkościennych zbudowanych m.in. ze ścianek (płyt) przęsłowych zajmowało się wielu badaczy wymienionych w pracach [3, 4].

2. Naprężenia krytyczne płyt przęsłowych

Naprężenia krytyczne (σ_{cr}) wywołujące wyboczenie płyty przęsłowej przy wzdłużnej zmienności naprężeń odniesiono do najbardziej ściskanej krawędzi (por. rys.1) i wyrażono w postaci klasycznego wzoru:

$$\sigma_{cr} = k \sigma_E \quad (1)$$

gdzie: k - płytowy współczynnik wyboczeniowy.

1. Introduction

In bar thin-walled members with flat walls, complex local phenomena occur, which are related to the local buckling of slender internal walls. Additionally, in many technically crucial cases, the analysis of the local stability of this class of members can be reduced to the buckling analysis of the plate, separated from the bar segment, when the conditions of the elastic restraint of plate edges and longitudinal stress distribution are accounted for (Fig.1). In [1], the thin-walled bar segment was defined as distance between transverse stiffenings (ribs, diaphragms, etc.), which ensure the stiff cross-section contour, independent of spontaneously forming the so-called “nodal lines” of buckling. Adopting such a definition is of key importance for the case, in which longitudinal stress variation occurs. Then, buckling “half-waves”, forming over the segment length, have variable lengths and decreasing amplitude [1, 2].

The stability of thin-walled members, built from, among others, internal walls (plates) was a matter of concern for many researchers quoted in studies [3, 4].

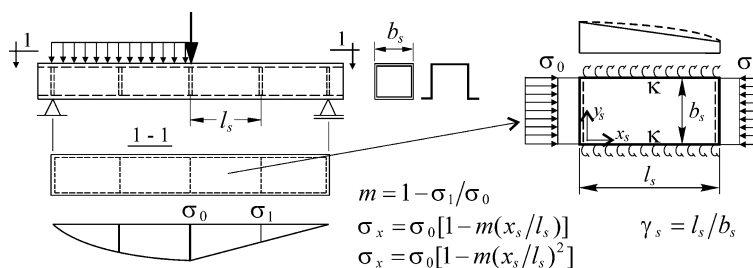
2. Critical stress in internal walls

Critical stress (σ_{cr}) that causes the internal plate buckling at longitudinal stress variation was referred to the most compressed edge (see Fig.1) and it was expressed in the form of a classic formula:

where: k – plate buckling coefficient.

Zmienność naprężeń normalnych w kierunku długości ściskanej płyty przęsłowej uwzględnił już Kowal w pracach [5, 6]. Zagadnienie stateczności poprzecznie zginanego dźwigara blachownicowego o przekroju skrzynkowym (por. rys.1), przy różnych wariantach obciążenia poprzecznego, sprowadzono do problemu stateczności swobodnie podpartej na wszystkich krawędziach płyty prostokątnej (półki ściskanej) o długości segmentu. Zagadnienie rozwiązano metodą Galerkin. Przedstawiono wykresy i tablice współczynników k w zakresie $\gamma_s = l_s/b_s = 1 \div 5$.

Variation in normal stress in the direction of the length of the compressed internal plate was already accounted for by Kowal in studies [5, 6]. The stability problem of transversely bent box plate girder (see Fig.1), for different variants of transverse loading, was reduced to the stability problem of rectangular plate (compressed flange), having the length of the segment, simply supported along all edges. The problem was solved using the Galerkin method. Graphs and tables of coefficients k in the range $\gamma_s = l_s/b_s = 1 \div 5$ were presented.



Rys. 1. Wydzielona z segmentu elementu cienkościennego płyta przęsłowa.
 Fig. 1. Internal plate separated from the thin-walled element segment.

W wielu technicznie ważnych przypadkach elementów cienkościennych, ściskane ścianki przęsłowe są symetrycznie sprężyste zamocowane „przeciw obrotowi” w ściankach sąsiednich (np. w środnikach), co można wykorzystać w modelu obliczeniowym [7, 8].

In many cases concerning thin-walled members, which are crucial from the technical standpoint, compressed internal walls are symmetrically elastically restrained “against rotation” in the neighbouring walls (e.g. in the webs), which can be used in the computational model [7, 8].

W pracach [7, 8] zagadnienie stateczności lokalnej ściskanego pasa dźwigara skrzynkowego sprowadzono do analizy wyboczenia obustronnie sprężyste zamocowanej płyty przęsłowej z uwzględnieniem wzdłużnej zmienności naprężeń wg funkcji liniowej i paraboli drugiego stopnia (por. rys. 1.) Poprzeczne krawędzie płyty przyjęto jako swobodnie podparte. Wskaźnik sprężystego utwierdzenia krawędzi podłużnych przyjęto wg [9] w postaci:

In studies [7, 8], the problem of local stability of the compressed box girder flange was reduced to the buckling analysis of the internal plate, which is bilaterally elastically restrained. Longitudinal stress variation was accounted for by means of a linear function and the second degree parabola (see Fig.1.) The plate transverse edges were assumed to be simply supported. The index of elastic fixity of longitudinal edges was assumed, in accordance with [9], in the following form:

$$\kappa = 1 / (1 + 2D_s / b_s C_\theta) \tag{2}$$

gdzie: D_s - sztywność giętna płyty (ścianki s), C_θ - sztywność obrotowa krawędzi, b_s - szerokość płyty.

where: D_s - the plate (wall s) flexural rigidity, C_θ - rotational spring stiffness of the edge, b_s - the plate width.

Zadanie rozwiązano metodą energetyczną. Opracowano program komputerowy „Ncr_internal_plate_elastic.nb” służący m.in. do wyznaczania i tablicowania współczynników wyboczeniowych k . Przedstawiono wykresy k dla sprężyste zamocowanych płyt przęsłowych, przy $\gamma_s = 1 \div 8$, dla następujących przypadków: 1) liniowy rozkład naprężeń dla $m = 0.5$ i 1 ; oraz 2) nieliniowy rozkład naprężeń dla $m = 0.5$ i 1 [8].

The problem was solved with the energy method. The “Ncr_internal_plate_elastic.nb” computer program, employed, among others, to determine and tabulate buckling coefficients k , was developed. Graphs of k for elastically restrained internal plates, when $\gamma_s = 1 \div 8$, were presented. The following cases were covered: 1) linear stress distribution for $m = 0.5$ and 1 ; 2) non-linear stress distribution for $m = 0.5$ and 1 [8].

Na rys. 2. liniami ciągłymi pokazano wykresy współczynnika k sprężyste zamocowanej i osiowo ściskanej płyty przęsłowej, przy liniowym rozkładzie naprężeń ($m = 1$), dla różnych wartości wskaźnika sprężystego utwierdzenia krawędzi podłużnych ($\kappa = 0 \div 1$), wyznaczonych programem wg [8].

In Fig. 2., solid lines denote the graphs of the coefficient k of elastically restrained and axially compressed internal plate. The graphs were plotted for the linear stress distribution ($m = 1$), and for different values of the index of elastic fixity of longitudinal edges ($\kappa = 0 \div 1$), determined with the computer program in accordance with [8].

W celu ułatwienia obliczeń naprężeń krytycznych płyt przęsłowych, dla dowolnego przypadku wartości parametrów: γ_s , m , oraz κ , w niniejszej pracy przedstawiono wzory aproksymacyjne współczynników wyboczeniowych k^* .

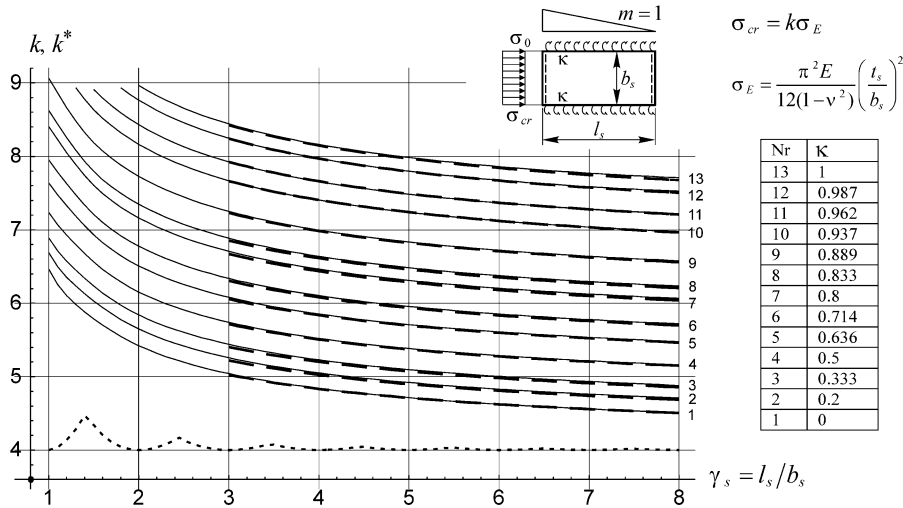
In the paper, approximation formulas for the plate buckling coefficients k^* were presented to make it easier to calculate the critical stress in internal plates, for arbitrary values of the parameters: γ_s , m , and κ .

Poprawne wyznaczenie naprężeń krytycznych dla sprężyste zamocowanych ścianek przęsłowych, przy obciążeniu wywołującym wzdłużną zmienność naprężeń (por. rys.1) określa przedział podkrytycznego zachowania się elementu cienkościennego [2]. Naprężenia krytyczne służą także do dokładniejszego szacowania nośności obliczeniowej w oparciu o metodę szerokości efektywnej. Przybliżony sposób

The correct determination of the critical stress for elastically restrained internal walls subjected to a load causing longitudinal stress variation (see Fig.1) specifies the pre-buckling range of a thin-walled element behaviour [2]. The critical stress also facilitates a more accurate estimation of the computational load capacity on the basis of the effective width method. Means of

oszacowania wskaźnika sprężystego utwardzenia ścianki przęsłowej w ściankach sąsiednich profilu cienkościennego podano m.in. w pracach [9, 10].

approximate estimation of the index of the internal wall fixity in the neighbouring walls of the thin-walled profile was given, e.g. in studies [9, 10].



Rys. 2. Porównanie płytowych współczynników wybocheniowych (k, k^*).

Fig. 2. Comparison of the plate buckling coefficients (k, k^*).

3. Wzory aproksymacyjne współczynnika k^*

Wzory aproksymacyjne wyprowadzono na podstawie analizy numerycznej dużego zbioru tablic współczynników wyznaczonych programem „Ncr_internal_plate_elastic.nb” dla następujących parametrów: $\kappa = 0; 0.1; 0.2; 0.27; 0.333; 0.42; 0.5; 0.57; 0.636; 0.68; 0.714; 0.76; 0.8; 0.833; 0.889; 0.937; 0.962; 0.987; 1.0$; $m = 0; 0.25; 0.5; 0.75; 1$; oraz $2 \leq \gamma_s \leq 20$ z krokiem 0.1, (łącznie 95 tablic zawierających ponad 17000 współczynników).

Ogólną postać wzoru aproksymacyjnego współczynnika k^* zapisano równaniem (3):

$$k^*(\kappa, m, \gamma) = k_\infty(\kappa) + \frac{f_q(\kappa, m)}{\gamma_s^{w_q(m)}} \tag{3}$$

gdzie: $k_\infty(\kappa)$ - współczynnik wybocheniowy dla nieskończenie długiej płyty przęsłowej przy stałej intensywności naprężeń ($m = 0$), $w_q(m)$ - wykładnik potęgowy,

3. Approximation formulas for the coefficient k^*

Approximation formulas were derived on the basis of the numerical analysis of a large set of tables of coefficients determined with the “Ncr_internal_plate_elastic.nb” program for the following parameters: $\kappa = 0; 0.1; 0.2; 0.27; 0.333; 0.42; 0.5; 0.57; 0.636; 0.68; 0.714; 0.76; 0.8; 0.833; 0.889; 0.937; 0.962; 0.987; 1.0$; $m = 0; 0.25; 0.5; 0.75; 1$; and $2 \leq \gamma_s \leq 20$ with the step 0.1, (95 tables in total, including over 17,000 coefficients).

The general form of the approximation formula for the coefficient k^* is given by the equation (3):

$$f_q(\kappa, m) = \sum_{n=0}^{n_0} \left(\sum_{j=0}^{j_0} c_{nj} m^j \right) \kappa^n \tag{4}$$

gdzie: c_{nj} - wyrazy macierzy współczynników wyznaczone metodą najmniejszych kwadratów.

where: $k_\infty(\kappa)$ - the buckling coefficient for an infinitely long internal plate at the constant stress intensity ($m = 0$), $w_q(m)$ - power exponent,

where: c_{nj} - terms of the matrix of coefficients determined with the least squares method.

Współczynnik wybocheniowy $k_\infty(\kappa)$ wyznaczono w postaci:

The buckling coefficient $k_\infty(\kappa)$ was determined in the following form:

$$k_\infty(\kappa) = 4 + 0.746\kappa + 2.304\kappa^3 - 2.836\kappa^5 + 2.73\kappa^7 \tag{5}$$

Dla liniowego rozkładu naprężeń wzór aproksymacyjny współczynnika k^* ma postać:

For the linear stress distribution, the approximation formula for the coefficient k^* is:

$$k^*(\kappa, m, \gamma) = k_\infty(\kappa) + \left[3.659m - 2.581m^2 + 1.184m^3 + (0.533m - 0.45m^2 + 0.218m^3)\kappa + (1.519m - 1.933m^2 - 1.046m^3)\kappa^3 - (2.536m - 4.247m^2 + 2.409m^3)\kappa^5 + (2.413m - 3.635m^2 + 1.992m^3)\kappa^7 \right] / \gamma_s^{(0.68+0.04m)} \tag{6}$$

Dla nieliniowego rozkładu naprężeń wzór aproksymacyjny współczynnika k^* ma postać:

$$k^*(\kappa, m, \gamma) = k_\infty(\kappa) + \left[3.814m - 6.58m^2 + 6.758m^3 - 2.572m^4 + (0.521m - 1.307m^2 + 1.488m^3 - 0.59m^4)\kappa + (1.891m - 5.218m^2 + 6.174m^3 - 2.529m^4)\kappa^3 - (4.555m - 14.648m^2 + 17.966m^3 - 7.454m^4)\kappa^5 + (3.833m - 11.694m^2 + 14.149m^3 - 5.833m^4)\kappa^7 \right] / \gamma_s^{(1+0.04m)} \quad (7)$$

Na rys. 2. liniami przerywanymi pokazano wybrane wykresy współczynnika k^* uzyskane ze wzoru (6).

Z porównania wykresów wynika dobra zgodność współczynników k^* z wartościami k wyznaczonymi programem komputerowym [8].

Na podstawie licznych testów obliczeniowych (wykonanych także dla pośrednich wartości parametrów m i κ) stwierdzono, że bezpieczne (konserwatywne) oszacowanie współczynnika k^* można uzyskać ze wzorów (6, 7) w następujących przedziałach: $\gamma_s \geq 3$; $0 \leq m \leq 1$; $0 \leq \kappa \leq 1$.

4. Podsumowanie

Poprawianie dokładności odwzorowania zachowania się elementu cienkościennego w inżynierskim modelu obliczeniowym jest naturalnym kierunkiem rozwoju współczesnych metod projektowania. Uwzględnienie w obliczeniach ścianki (płyty) przęsłowej zarówno wskaźnika sprężystego utwierdzenia ($0 \leq \kappa \leq 1$) jak również wzdłużnej zmienności naprężeń ($0 \leq m \leq 1$) prowadzi do dokładniejszej oceny naprężeń krytycznych.

Podane w pracy wzory aproksymacyjne płytowego współczynnika wyboczeniowego k^* umożliwiają relatywnie proste wyznaczanie naprężeń krytycznych w osiowo ściskanych i sprężycie zamocowanych ściankach przęsłowych przy wzdłużnej zmienności naprężeń. Ułatwia to oszacowanie nośności obliczeniowej tej klasy elementów cienkościennych w oparciu o metodę szerokości efektywnej.

Literatura • References

- [1] Szychowski A., (2008), *The stability of eccentrically compressed thin plates with a longitudinal free edge and with stress variation in the longitudinal direction*, Thin-Walled Structures 2008, 46 (5), pp. 494-505.
- [2] Kowal Z., Szychowski A., (2014), *Experimental determination of critical loads in thin-walled bars with Z-section subjected to warping torsion*, Thin-Walled Structures 2014(75), pp. 87-102.
- [3] Bulson P.S., (1970), *The Stability of Flat Plates*, Chatto and Windus, London 1970.
- [4] Kubica E., (2005), *Nośność graniczna i sztywność podłużna cienkościennych elementów stalowych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2005.
- [5] Kowal Z., (1965), *Stateczność ściskanego pasa w dźwigarze blachowym o przekroju skrzynkowym*, Zeszyty Naukowe Politechniki Wrocławskiej, Budownictwo 1965, 122, s.73-85.
- [6] Kowal Z., (1966), *Stateczność blachy górnej metalowego fundamentu pontonowego*, Węgiel Brunatny 1966, 4, s. 331-333.
- [7] Szychowski A., (2011), *Stateczność ściskanego pasa dźwigara skrzynkowego przy wzdłużnej zmienności naprężeń*, XII Międzynarodowa Konferencja Naukowo-Techniczna „Konstrukcje Metalowe”, Wrocław 2011.
- [8] Szychowski A., (2014), *Stability of the compressed flange of the box girder loaded transversely*, Journal of Constructional Steel Research (JCSR-D-14-00004) w trakcie recenzji.
- [9] Rykaluk K., (1981), *Pozostające naprężenia spawalnicze w wybranych stanach granicznych nośności*, Prace Naukowe Instytutu Budownictwa Politechniki Wrocławskiej, 29, seria: Monografie 11, Wrocław 1981.
- [10] Kalyanaraman V., (1979), *Local buckling of cold-formed steel members*, Journal of the Structural Division 1979, Vol. 105, No.ST5, 813-828.

For the non-linear stress distribution, the approximation formula for the coefficient k^* has the following form:

In Fig.2., broken lines represent selected graphs of the coefficient k^* obtained from the formula (6). The comparison of the graphs indicates good congruence of coefficients k^* and values k determined with the computer program in accordance with [8].

On the basis of numerous computational tests (also performed for the intermediate values of the parameters m and κ), it was found that safe (conservative) estimation of the coefficient k^* could be obtained from formulas (6, 7) in the following ranges: $\gamma_s \geq 3$; $0 \leq m \leq 1$; $0 \leq \kappa \leq 1$.

4. Summary

Enhanced accuracy in representing the behaviour of a thin-walled member in the engineering computational model is an established trend in the development of the design methods. Taking into account both the index of elastic fixity ($0 \leq \kappa \leq 1$) and longitudinal stress variation ($0 \leq m \leq 1$) in the calculations for the internal wall (plate) leads to a more accurate assessment of the critical stress.

The approximation formulas for the plate buckling coefficient k^* , given in the paper, make it possible to determine, in a relatively simple manner, the critical stress in axially compressed and elastically restrained internal walls at longitudinal stress variation. That makes it easier to estimate, on the basis of the effective width method, the computational load capacity of this class of thin-walled members.