

Metoda wyznaczania ugięć płatwi z zetownika giętego w stanie nadkrytycznym A method of predicting deflection of Z-purlins in the post-buckling state

Łukasz Supel¹, Jerzy Goczek

¹Katedra Mechaniki Konstrukcji, Zakład Konstrukcji Stalowych,
Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska, Politechnika Łódzka
Aleja Politechniki 6, 90-924 Łódź
e-mail: lukasz.supel@p.lodz.pl

¹Department of Structural Mechanics, Division of Steel Structures,
Faculty of Civil Engineering, Architecture and Environmental Engineering, Lodz University of Technology
Aleja Politechniki 6, 90-924 Łódź
e-mail: lukasz.supel@p.lodz.pl

Streszczenie

W pracy zastosowano metodę krzywiznową do analizy wpływu zmienności sztywności giętej w stanie nadkrytycznym płatwi z zetownika giętego na jej ugięcia. W tym celu, na podstawie przepisów Eurokodu 3, wyprowadzono zależność między momentem a krzywizną oraz zaproponowano jej aproksymację. Porównano linie ugięcia wyznaczone zgodnie z proponowanym podejściem i uproszczoną metodą normową. Przedstawiona metoda może być zastosowana również do analizy wpływu zmiany sztywności giętej na rozkład momentu zginającego w przypadku belek statycznie niewyznaczalnych.

Abstract

The paper presents the curvature method applied for the analysis of the influence of bending stiffness changeability on cold-formed Z-purlin deflections in the post-buckling state. For this purpose, the relationship between moment and curvature was developed using the Eurocode 3 rules and its approximate relationship was proposed. The deflected shapes obtained from the developed approach and the simplified code procedure were compared. The presented method can also be applied for statically indeterminate beams to analyse the influence of the bending stiffness changeability on the bending moment distribution.

Słowa kluczowe: zetowe płatwie gięte, stan nadkrytyczny, zależność moment-krzywizna, obliczanie ugięć.

Keywords: cold-formed Z-purlin, post-buckling state, moment-curvature relationship, deflection determination.

1. Wprowadzenie

Płatwie z kształtowników giętych są stosowane ze względu na ich walory ekonomiczne. Ich zachowanie się jest bardzo złożone, a obliczenia są żmudne. Kształtowniki gięte ulegają trzem postaciom niestateczności - miejscowej, dystorsyjnej i ogólnej. Niestateczności miejscowa i dystorsyjna pojawiają się w smukłych ściankach przekroju. Takie przekroje zgodnie z Eurokodem 3 są klasy 4, a przy weryfikacji stanów granicznych obliczane są charakterystyki efektywne tych przekrojów. Efektywny moment bezładności I_{eff} , a tym samym sztywność gięta EI_{eff} zależą od wartości naprężeń normalnych. Efektywna sztywność gięta zmienia się na długości belki zależnie od rozkładu momentu zginającego. Zmiana ta wpływa na rozkład momentu zginającego w przypadku belek statycznie niewyznaczalnych i na ugięcia wszystkich belek o przekrojach klasy 4.

Obliczanie ugięć belek o przekrojach klasy 4 według [1] jest uproszczone. Chociaż efektywny moment bezładności może być przyjmowany jako zmienny na długości przęsła $EI_{\text{eff}}(M)$, to nie podano, jak to zrobić. Alternatywnie można przyjąć stałą wartość sztywności giętej, obliczoną dla maksymalnego momentu przęsłowego lub podporowego, przy obciążeniach w stanie granicznym użyteczności, co jest podejściem konserwatywnym. Zastosowanie metody krzywiznowej, zaproponowanej w pracy, pozwalana na bardziej dokładne obliczenia płatwi z kształtowników giętych i jest proste, zwłaszcza gdy zależność moment-krzywizna jest aproksymowana wielomianem.

1. Introduction

Cold-formed Z-purlins are often used due to economic benefits. Their behaviour is very complex and calculations are difficult. Cold-formed steel members are prone to local, distortional, and overall instability modes. The local and distortional instabilities occur in slender plate elements. Such cross-sections are categorized as Class 4 in Eurocode 3 and their effective characteristics are calculated. The value of normal stress determines the effective second moment of area I_{eff} , i.e., bending stiffness EI_{eff} . Thus, the effective bending stiffness varies along the beam length depending on the bending moment distribution. This affects the bending moment distribution for statically indeterminate beams and deflections for all beams of Class 4 cross-sections.

The Eurocode 3 [1] rules for determining the deflection of beams of Class 4 cross-sections are simplified. Although, the effective second moment of area may be taken as variable along the span $EI_{\text{eff}}(M)$ but there are no recommendations on the implementation. Alternatively, a uniform value of bending stiffness may be used, calculated for the maximum absolute span or support value of bending moment in the serviceability limit state, which is conservative. The application of the curvature method, proposed in the paper, allows more precise calculations of cold-formed purlins, and is simple, especially if the moment-curvature relationship is approximated with polynomial function.

2. Nieliniowe zachowanie się płatwi z zetownika giętego

Płatwie z zetownika giętego sężone bocznie przez poszycie o dostatecznej sztywności postaciowej są zginane względem osi y-y, chociaż nie jest ona osią główną oraz uginają się w płaszczyźnie prostopadłej do poszycia. Zależnie od proporcji wymiarowych przekroju może pojawić się wyboczenie miejscowe lub/i dystorsyjne i powodować nieliniowe zachowanie się. Wyboczenie inicjuje ścianka, która pierwsza osiąga naprężenie krytyczne. Zależnie od proporcji przekroju poprzecznego różne ścianki mogą inicjować wyboczenie. W przypadku zetowników giętych wyboczenie dystorsyjne może wystąpić przed wyboczeniem miejscowym lub po nim. Możliwe jest również, że jedna z postaci wyboczenia lub obie nie wystąpią przed uplastycznieniem włókien ściskanych.

3. Zależność moment-krzywizna

Wymiary przekroju poprzecznego analizowanej w pracy płatwi z zetownika ze stali S350 pokazano na rys. 1a. Przyczyną nieliniowości w tym przypadku jest wyboczenie ścianek przekroju. Nieliniowości innego rodzaju, jak efekt szerokiego pasa czy częściowe uplastycznienie strefy rozciąganej, nie występują. Zachowanie się nieliniowe rozpoczyna się wyboczeniem dystorsyjnym przy naprężeniu normalnym $\sigma_{com,Ed}=116,9$ MPa. Następnie występuje wyboczenie miejscowe i stan nadkrytyczny kolejno w środku, w stopce i w usztywnieniu brzegowym, przy naprężeniach normalnych równych odpowiednio $\sigma_{com,Ed}=119,4$ MPa, $\sigma_{com,Ed}=135,5$ MPa, $\sigma_{com,Ed}=192,9$ MPa.

Krzywizna Φ_{b1} odpowiada wyboczeniu dystorsyjnemu (rys. 1a). Uplastycznienie skrajnych włókien ściskanych następuje przy krzywiznie Φ_y (rys. 1c). Krzywizna Φ_{b2} jest wartością pośrednią (rys. 1b) obliczoną przy naprężeniu normalnym równym średniej arytmetycznej naprężeń początku wyboczenia dystorsyjnego i początku uplastycznienia ($\sigma_{com,Ed}=233,5$ MPa). Krzywizny te odpowiadają wartościom momentów zginających, oznaczonych tymi samymi indeksami.

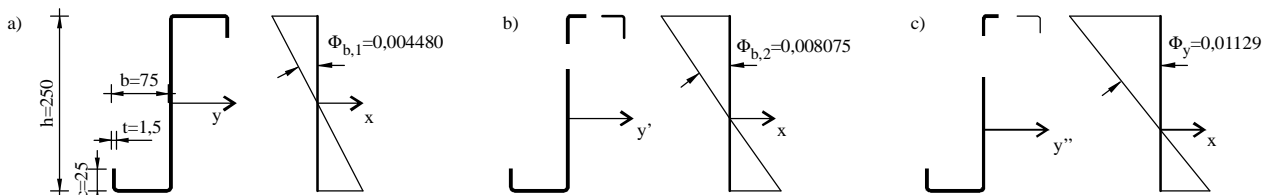
2. Nonlinear behaviour of the cold-formed Z-purlin

Cold-formed Z-purlins restrained laterally by the sheeting of sufficient shear stiffness are bent about y-y axis, although it is not the cross-section main axis, and deflect in the plane perpendicular to the sheeting. Depending on the cross-section proportions, local or/and distortional buckling may occur, and cause nonlinear behaviour. Buckling starts in a plate element of the cross-section, in which stress reaches the critical value first. Depending on the cross-section proportions different plate elements may initiate buckling. For cold-formed Z-sections distortional buckling may occur before local buckling or after it. It is possible that one of modes or both do not occur before yielding at the outer compression fibres.

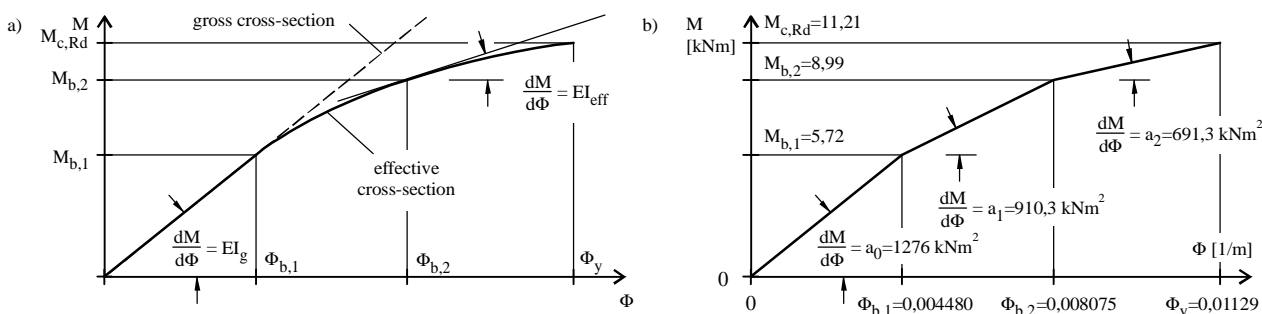
3. Moment-curvature relationship

The dimensions and axes of Z-profile made of steel grade S350 are shown in Fig 1a. For this profile the only cause of nonlinearity is buckling of cross-section plate elements. Nonlinearities of other types, such as shear lag effect and partial cross-section yielding in the tension zone do not occur. Due to the proportions of the cross-section distortional buckling occurs, when the value of normal stress is equal to $\sigma_{com,Ed}=116,9$ MPa. Then local buckling occurs, and the post-buckling state develops in the web, flange, and edge stiffener at normal stresses equal to $\sigma_{com,Ed}=119,4$ MPa, $\sigma_{com,Ed}=135,5$ MPa, $\sigma_{com,Ed}=192,9$ MPa respectively.

The curvature Φ_{b1} corresponds to distortional buckling (Fig. 1a). The yield criterion is fulfilled for curvature Φ_y (Fig. 1c). The curvature Φ_{b2} is the intermediate value (Fig. 1b), calculated for normal stress equal to the arithmetical average between the values corresponding to distortional buckling and the yield criterion ($\sigma_{com,Ed}=233,5$ MPa). The calculated curvatures correspond to the values of bending moment with the same index.



Rys. 1. Wartości krzywizn odpowiadających granicom między stanami (opis w tekście)
 Fig. 1. Curvature values relating to the states (see in the text)



Rys. 2. Zależność moment-krzywizna (opis w tekście)
 Fig. 2. Moment-curvature relationship (see in the text)

Ustaloną numerycznie zależność $M-\Phi$ pokazano na rys. 2a. Zależność $M-\Phi$ jest początkowo liniowa. Sztywność giętna następnie zmniejsza się stopniowo do minimalnej wartości EI_{eff} w stanie granicznym, gdy pojawia się niestateczność dystorsyjna i stan nadkrytyczny. Zależność $M-\Phi$ jest aproksymowana odcinkami liniowo, aby uprościć dalsze obliczenia (rys. 2b).

4. Analiza ugięć płatwi zetowej w metodzie krzywiznowej

Jeżeli płatwie są belkami ciągłymi obciążonymi równomiernie, to równanie momentu zginającego jest trójmianem kwadratowym. Aby uprościć całkowanie funkcji krzywizny, zastosowano zapis sumacyjny. Belkę podzielono na n odcinków o stałej długości, numerowanych $i=1, 2 \dots n$, gdzie i jest indeksem sumacyjnym. W przypadku gęstego podziału można przyjąć, że moment zginający, krzywizna, nachylenie i deformacja są stałe na długości odcinka i i równe wartościom odpowiadającym odcętom x_i . Te współrzędne są środkowymi punktami każdego z odcinków. Równanie kwadratowe momentu zginającego $M(x)$ zamieniane jest na stałe wartości M_i .

$$M_i = M(x_i), \tag{1}$$

gdzie:

where:

$$x_i = i \cdot L/n - L/2n. \tag{2}$$

Krzywizna w punktach x_i jest obliczana z odcinkowo liniowej zależności odwrotnej $\Phi-M$:

The curvature at points x_i is evaluated using linear by segments $\Phi-M$ inverse relationship:

$$\Phi_i = \Phi(M_i). \tag{3}$$

Krzywizna jest całkowana jednokrotnie, aby otrzymać kąt nachylenia, a następnie ponownie, aby otrzymać ugięcie. Początkowe wartości nachylenia i ugięcia przyjmowane są równe zero, co odpowiada pierwszemu warunkowi brzegowemu ($w(0)=0$). Nachylenie i ugięcie, otrzymane bez uwzględnienia drugiego z warunków brzegowych ($w(L)=0$), podano wzorami 4 i 5. Stałe całkowania na tym etapie pominięto, dlatego linię ugięcia należy skorygować, aby spełnić wszystkie warunki brzegowe. Przy podwójnym całkowaniu funkcji krzywizny linia ugięcia jest korygowana funkcją liniową. Skorygowane ugięcie jest rozwiązaniem w przypadku danej krzywizny (wzór 6).

The curvature is first numerically integrated to compute the slope, and then once more to compute the deflection. The initial slope and deflection are assumed to be zero, which corresponds to the first boundary condition ($w(0)=0$). The slope and the deflection, regardless of the second boundary condition ($w(L)=0$) are given by Eqns. 4 and 5. The constants of integration was neglected in this step of calculations, therefore the deflected shape has to be adjusted to fulfil all the boundary condition. The deflection shape is corrected by using the linear function, because of double summation of the curvature curve. The corrected deflection is the solution for the given curvature (Eq. 6).

$$\theta_i = L/n \cdot (\Phi_{i-1} + \Phi_i), \tag{4}$$

$$w_i = L/n \cdot (\theta_{i-1} + \theta_i), \tag{5}$$

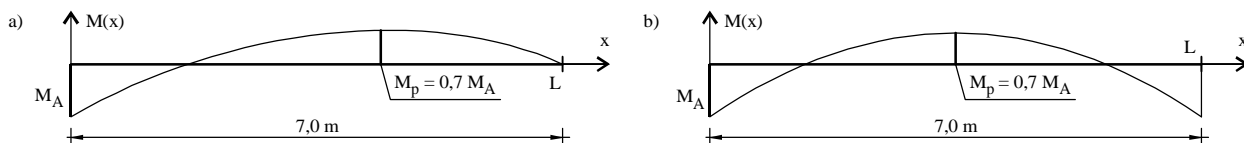
$$\bar{w}_i = w_i - x_i w_n / x_n. \tag{6}$$

5. Przykład numeryczny wyznaczania ugięć

W dalszej części pracy rozważane są przęsła skrajne i wewnętrzne płatwi o podanym wcześniej przekroju. Na rysunku 3a pokazano rozkład momentów w przypadku przęsła skrajnych, a na rys. 3b w przypadku przęsła wewnętrznego.

5. Numerical example for deflection determination

In the following paper the end, and the internal spans of the purlin of a cross-section previously specified are considered. Figure 3a shows the bending moment distribution for end spans and Fig. 3b for the internal span.



Rys. 3. Rozkład momentów zginających: a) przęsło skrajne, b) przęsło wewnętrzne
 Fig. 3. Bending moment distribution: a) the end span, b) the internal span

Tablica 1. Ugięcia płatwi przy różnych rozkładach sztywności giętej (wartości w [mm])
 Table 1. Deflection of the purlin for different bending stiffness distributions (values in [mm])

$M_A/M_{c,Rd}$	End span				Internal span			
	$w (EI_g)$	$w (EI_{eff,ser})$	$w (curv. meth.)$	3/4	$w (EI_g)$	$w (EI_{eff,ser})$	$w (curv. meth.)$	7/8
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	25,03	32,15	26,77	120,1%	22,43	28,81	23,94	120,3%
0,9	22,53	28,94	23,47	123,3%	20,18	25,93	21,00	123,5%
0,8	20,02	25,72	20,30	126,7%	17,94	23,05	18,17	126,9%
0,7	17,51	22,51	17,52	128,5%	15,69	20,17	15,70	128,5%

Tablica 1 przedstawia wartości maksymalnych ugięć przy różnych wyężeniach przekroju podporowego, wyrażonych momentem podporowym M_A , równym 0,7, 0,8, 0,9 i 1,0 nośności obliczeniowej tego przekroju ($M_{c,Rd}$). Przyjęto stałą wartość stosunku momentów przeszłowego do podporowego, równą 0,7. Wartości ugięć odpowiadające stanowi granicznemu użyteczności zaznaczono pogrubioną czcionką. Stosunek momentu zginającego w stanie granicznym użyteczności do nośności obliczeniowej równy 0,7 jest często spotykany w lekkich konstrukcjach stalowych, w przypadku których obciążenie użytkowe przeważa nad stałym. Ugięcia wyznaczone przy różnych rozkładach sztywności giętej: stałej i zmiennej na długości. Wartości w kolumnach 2 i 6 (tab. 1) odpowiadają przypadkowi, gdy sztywność gięta jest stała i równa sztywności przekroju brutto EI_g . Wartości w kolumnach 3, 7 oraz 4, 8 odpowiadają przypadkowi sztywności giętej przekroju efektywnego EI_{eff} , odpowiednio stałej (procedura według [1], [2]) oraz zmiennej (metoda krzywiznowa) na długości belki. Stała wartość EI_{eff} odpowiada maksymalnemu momentowi zginającemu (M_A).

6. Wnioski

W pracy badano zachowanie się belek o przekroju klasy 4, w którym wyboczenie miejscowe i dystorsyjne odgrywają istotną rolę, a inne rodzaje nieliniowości nie występują. Porównanie ugięć maksymalnych wyznaczonych przy sztywności giętej EI_g , stałej na długości belki i przy sztywności giętej $EI_{eff}(x)$, zmiennej na długości belki pokazuje niedoszacowanie ugięć, jeśli przyjmiemy stałą sztywność giętną EI_g . Porównanie ugięć maksymalnych wyznaczonych przy sztywności giętej $EI_{eff,ser}$, stałej na długości belki i przy sztywności giętej $EI_{eff}(x)$, zmiennej na długości belki pokazuje przeszacowanie ugięć, jeśli przyjmą stałą sztywność giętną $EI_{eff,ser}$.

Zależność $M-\Phi$ można wyznaczyć analitycznie, w oparciu o przepisy Eurokodu 3, lub eksperymentalnie.

Literatura • References

[1] EN 1993-1-3:2006 Eurocode 3 – Design of steel structures – Part 1-3: General rules – Supplementary rules for cold-formed members and sheeting.
 [2] EN 1993-1-5:2006 Eurocode 3: Design of steel structures – Part 1 -5: Plated structural elements, CEN, 2005.
 [3] Goczek J.: Belki z kształtowników giętych stężone poszyciem z blach fałdowych. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej 2013.
 [4] Goczek J., Supel Ł.: Płatwie z kształtowników profilowanych na zimno. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej 2014.

Table 1 presents the values of maximum deflection for different levels of cross-section effort expressed by bending moment M_A equal to 0.7, 0.8, 0.9 and 1.0 of the cross-section design resistance ($M_{c,Rd}$). The ratio for maximum span M_p to support moment M_A is assumed constant and equal to 0.7. The values of deflection in the serviceability limit state are marked in bold font. The ratio 0.7 for the bending moments evaluated for serviceability and ultimate load seems to be realistic for lightweight steel structures, where variable actions predominate permanent actions. The deflections are obtained for different bending stiffness distribution: constant and non-constant along the beam length. The values in columns 2 and 6 (Table 1) relate to the case, when the bending stiffness is constant along the beam length, and equal to the bending stiffness of gross cross-section EI_g . The value in columns 3, 7, and 4, 8 relate to the case, when the bending stiffness of effective cross-section EI_{eff} is constant (procedure according to [1], [2]) or non-constant (curvature method) along the beam length, respectively. The constant value of EI_{eff} corresponds to the maximum bending moment (M_A).

6. Conclusions

In the paper, the behaviour of beams of Class 4 cross-sections was investigated, in which the local and distortional buckling plays the key role, and other types of nonlinearities do not occur. Comparison between the maximum deflections, calculated for the bending stiffness EI_g , constant along the beam length, and for the bending stiffness $EI_{eff}(x)$, changeable along the beam length, shows the undervaluation of deflection, if the constant bending stiffness EI_g is assumed. Comparison between the maximum deflections, calculated for the bending stiffness $EI_{eff,ser}$, constant along the beam length, and for the bending stiffness $EI_{eff}(x)$, changeable along the beam length, shows overvaluations of deflection, if the constant bending stiffness $EI_{eff,ser}$ is assumed.

The $M-\Phi$ relationship can be obtained analytically based on the Eurocode 3 rules, or experimentally.