

## Analiza stateczności sinusoidalnie pofałdowanych środników dźwigarów dwuteowych Stability analysis of sinusoidally corrugated web I-girders

Wojciech Perliński<sup>1</sup>, Bohdan Michalak<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Katedra Mechaniki Budowli,  
Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska, Politechnika Łódzka  
Al. Politechniki 6, 90-924 Łódź  
e-mail: wojciech.perlinski@p.lodz.pl

<sup>2</sup> Department of Structural Mechanics  
Faculty of Civil Engineering, Architecture and Environmental Engineering, Lodz University of Technology  
Al. Politechniki 6, 90-924 Łódź  
e-mail: Bohdan.michalak@p.lodz.pl

### Streszczenie

W pracy przedstawiono wyniki analizy stateczności pofałdowanych środników dźwigarów dwuteowych dla dwóch modeli – płytowego oraz powłokowego, dla dwóch typów obciążenia – równomiernego ściskania oraz ścinania. Zbadano wpływ warunków brzegowych na wartości sił krytycznych. Porównano wyniki oraz określono granicę stosowalności modelu płytowego.

### Abstract

The paper presents the results of stability analysis of corrugated web I-girders for the two models-the plate and shell, for two types of load-compression and shear. The influence of boundary conditions on the critical forces has been examined. The results are compared and the limit of applicability of the model plate is determined.

*Słowa kluczowe: konstrukcje metalowe, analiza stateczności, środniki faliste, stateczność środników, pofałdowanie sin.*  
*Keywords: steel structures, stability analysis, corrugated web, webs stability, sin corrugation.*

### 1. Wstęp

Konstrukcje stalowe z pofałdowanymi środnikami są intensywnie wykorzystywane w wielu krajach. Wykorzystanie konstrukcji tego typu dotyczy zarówno elementów budowlanych jak i konstrukcji mostowych. Pofałdowanie środnika zapewnia zwiększenie jego sztywności z płaszczyzny belki i pozwala eliminować żebra pionowe stosowane w konstrukcjach z płaskimi środnikami. Stąd zastosowanie pofałdowania środnika prowadzi do relatywnie wysokiego stosunku sztywności do wagi konstrukcji.

Celem rozważań jest analiza stateczności pofałdowanych środników i wpływu warunków brzegowych wynikających z połączenia środnika z pasami na wartość sił krytycznych. Przedmiotem rozważań będą środniki belek dwuteowych pofałdowanych sinusoidalnie w jednym kierunku. Belki z pofałdowanymi środnikami były analizowane zarówno przez autorów polskich jak i zagranicznych, wymienimy przykładowo: Kozłowski i Ślęczka (2007), Kuchta (2007, 2011) Abbas i inni (2006), Hassanein i Kharoob (2013).

W większości prac przyjmuje się, że pofałdowany środnik przenosi tylko siły ścinające. Środniki te tylko w nieznacznym stopniu przenoszą naprężenia normalne ze względu na ich małą sztywność w tym kierunku. W rozpatrywanym opracowaniu poza analizą stateczności na ścinanie, będzie analizowana również ściskanie. Będą porównane wartości sił krytycznych dla dwóch modeli matematycznych (płyty ortotropowej i modelu powłokowego) i różnych wyniosłości fałdy środnika.

Siły krytyczne dla wyizolowanego fragmentu belki mogą być obliczone w dwojaki sposób. Po pierwsze z modelu płyty ortotropowej z różnymi warunkami brzegowymi i po drugie, jako układu powłokowego złożonego z pofałdowanego środnika i

### 1. Introduction

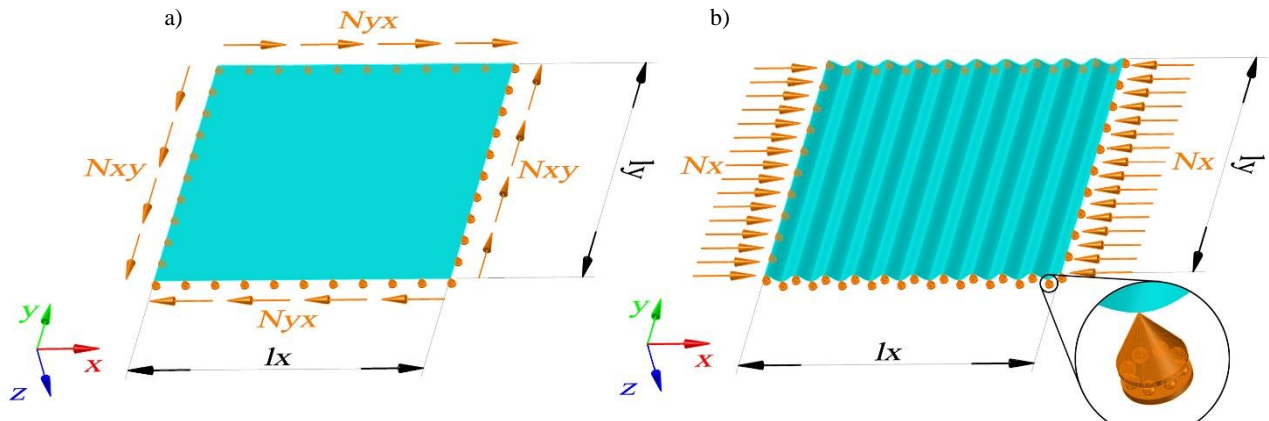
Steel structures with corrugated webs are extensively used in many countries. Such elements are applied in building structures and bridges. Corrugation web provides an increase in the stiffness of the beam plane and allows to eliminate the vertical ribs used in structures with conventional flat webs. Application of corrugated web leads to a relatively high stiffness to weight ratio of structure.

The aim of the dissertation is to analyse the stability of corrugated webs and the impact of the boundary conditions at the juncture of the web and flanges on the value of the critical forces. The subjects of analysis are unidirectionally, sinusoidally corrugated web I-beams. Beams with corrugated webs were analyzed both by Polish and foreign authors, for example: Kozłowski and Ślęczka (2007), Kuchta (2007, 2011) Abbas i inni (2006), Hassanein Kharoob (2013).

In most papers, it is assumed that corrugated web transfers only shear forces. These webs transfer insignificantly normal stress due to their low stiffness in this direction. In the present study apart from the analysis of shear stability, the stability for compression is analysed. Eventually the critical forces are compared for the two mathematical models (orthotropic plate and shell model) and various haughtiness folds the web.

Critical forces for the isolated fragment of beam can be calculated in two ways. Firstly, as anorthotropic plate model with different boundary conditions, secondly, as a shell model consisting of a corrugated web and flanges. The analysis of the linear elastic stability of the shell model is performed using ABAQUS programme.

pasów. Analizę liniowej stateczności sprężystej układu powłokowego przeprowadzono używając programu ABAQUS.



Rys. 1. Obciążenia oraz warunki brzegowe dla fragmentu środnika dźwigara: a) układ płytowy - ścinanie, b) układ powłokowy – równierne ściskanie

Fig. 1. Loads and boundary conditions for a fragment of web girder: a) plate model – shear, b) shell model – uniform compression

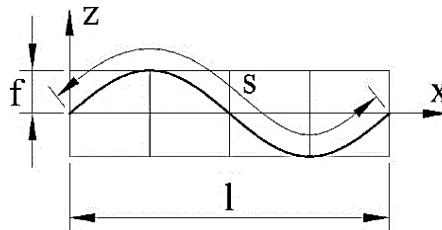
2. Modele obliczeniowe

2.1. Model płytowy

Wartości obciążeń krytycznych zostaną określone ze znanego równania (1) opisującego stateczność liniową prostokątnej płyty ortotropowej [3]. Moduły sztywności dla fałdy opisanej na Rys. 2 można obliczyć ze wzorów (2).

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{1}$$

$$D_{11} = \frac{E \cdot t^3}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{l}{s}; \quad D_{22} = \frac{E}{l} \int_0^l \frac{z^2 \cdot t}{\cos \varphi} dx; \quad s = \int_0^l \frac{1}{\cos \varphi} dx; \quad z(x, y) = f \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \tag{2}$$



Rys. 2. Schemat pofałdowania środnika.

Fig. 2. The scheme of web corrugations.

Sztywności pasów na obrót wzdłuż osi belki są bardzo małe w stosunku do sztywności pofałdowanego środnika. Stąd w pierwszym etapie w analizie stateczności przyjęto warunki brzegowe płyty swobodnie podpartej. Rozwiązania równań (1) będziemy poszukiwać dla przypadku równomiernego ściskania w postaci podwójnych szeregów trygonometrycznych, a dla przypadku ścinania korzystając z metody energetycznej.

Przykładowe wyniki dla płyt o różnych stosunkach boków:

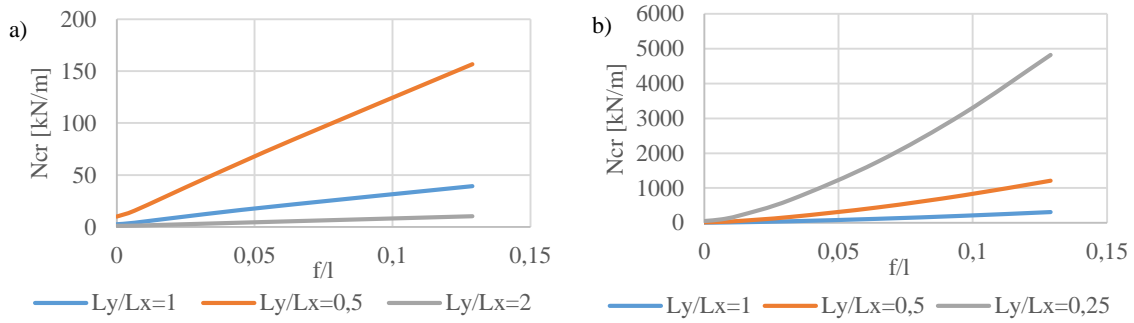
2. Computational models

2.1. The plate model

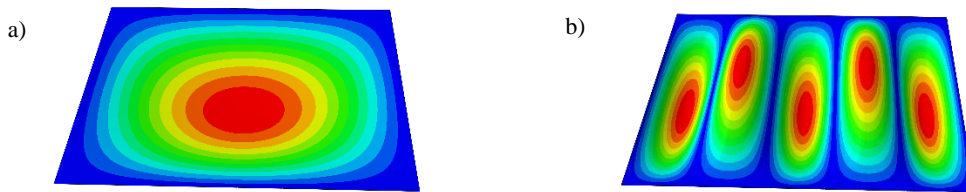
Critical load values are determined from the known equation (1) describing the linear stability of a rectangular orthotropic plate [3]. Rigidity modules for corrugations described in Fig.2 can be calculated from formulas (2).

Stiffness of the flanges to the rotation axis of the beam is very small compared to the stiffness of the corrugated web. Thus, in a first step in the analysis of the stability boundary conditions assumed simply supported plate. We are looking for the solutions of equations (1) in the case of uniform compression in the form of double trigonometric series, and in the case of shear using the energy method.

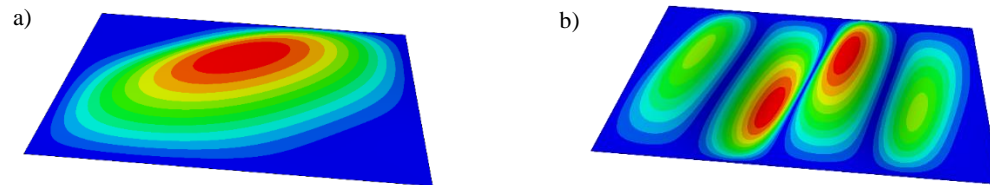
Sample results for plates with different ratios of sides:



Rys. 3. a) równomierne ściskanie, b) ścinanie - siła krytyczna w zależności od  $f/l$  ( $f$ -wyniosłość fałdy,  $l$ -długość fałdy).  
 Fig. 3. a) uniform compression, b) shear – critical force depending of the  $f/l$  ( $f$ -eminence folds,  $l$ -length folds).



Rys. 4. Równomierne ściskanie – postacie utraty stateczności dla a)  $f/l=0$  oraz dla b)  $f/l=0,13$ .  
 Fig. 4. Uniform compression – buckling mode for a)  $f/l=0$  and dla b)  $f/l=0,13$ .



Rys. 5. Ścinanie – postacie utraty stateczności dla a)  $f/l=0$  oraz dla b)  $f/l=0,13$ .  
 Fig. 5. Shear – buckling model for a)  $f/l=0$  and for b)  $f/l=0,13$ .

2.2. Model powłokowy

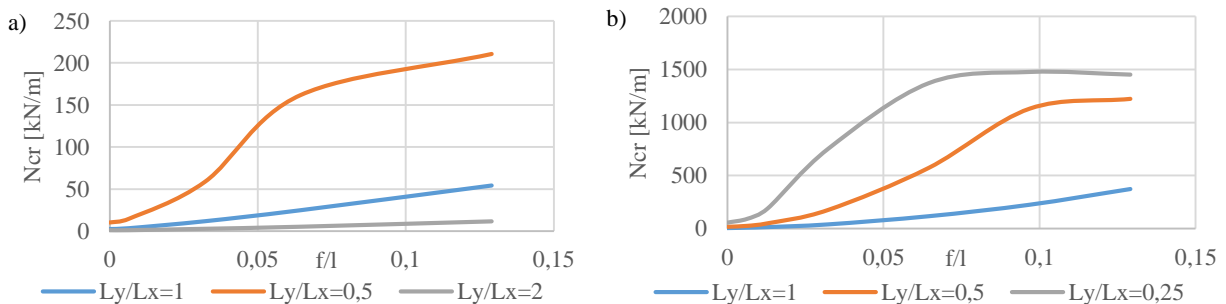
Wartości sił krytycznych i postacie utraty stateczności określono korzystając z programu ABAQUS. Zastosowano model materiału liniowo sprężystego i czterowęzłowe elementy powłokowe o 5 stopniach swobody typu S35R. W pierwszym etapie obliczeń zastosowano warunki brzegowe odpowiadające swobodnemu podparciu płyty.

Przykładowe wyniki dla płyt o różnych stosunkach boków:

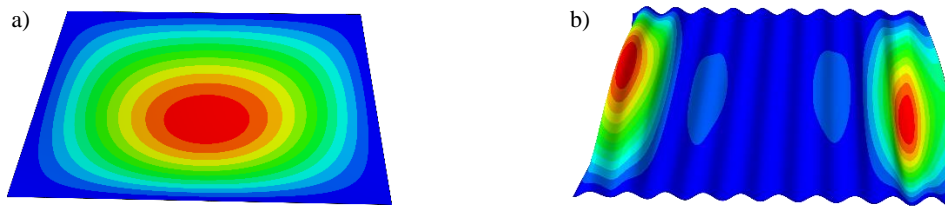
2.2. The shell model

The values of critical forces and buckling modes was determined using ABAQUS programme . A model of a linear elastic material and mesh with 5 degrees of freedom - S35R. In the first step of calculations, the boundary conditions corresponding to simply supported plate were used.

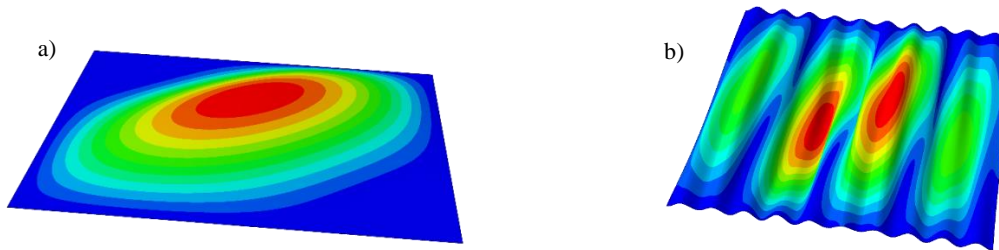
Sample results for plates with different ratios of sides:



Rys. 6. a) równomierne ściskanie, b) ścinanie - siła krytyczna w zależności od  $f/l$  ( $f$ -wyniosłość fałdy,  $l$ -długość fałdy).  
 Fig. 6. a) uniform compression, b) shear – critical force depending of the  $f/l$  ( $f$ -eminence folds,  $l$ -length folds).



Rys. 7. Równomierne ściskanie – postacie utraty stateczności dla a)  $f/l=0$  oraz dla b)  $f/l=0,13$ .  
 Fig. 7. Uniform compression – buckling model for a)  $f/l=0$  and for b)  $f/l=0,13$ .



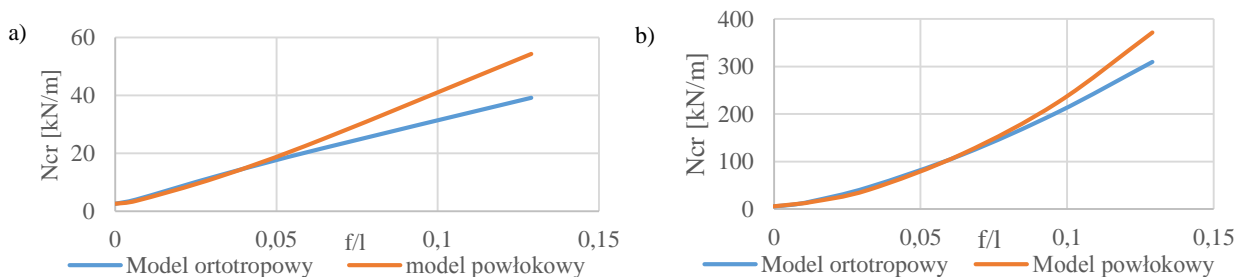
Rys. 8. Ścinanie – postacie utraty stateczności dla a)  $f/l=0$  oraz dla b)  $f/l=0,13$ .  
 Fig. 8. Shear – buckling model for a)  $f/l=0$  and for b)  $f/l=0,13$ .

**3. Porównanie wartości siły krytycznych modelu płytowego z modelem powłokowym**

Na rys. 9 przedstawiono wartości sił krytycznych dla segmentu środnika o równych bokach z obu modeli w zależności od parametru  $f/l$ . Na ich podstawie możemy stwierdzić, że w przypadku segmentu środnika o równych bokach model płytowy może być stosowany: w przypadku równomiernego ściskania dla parametru  $f/l=0,05$  a w przypadku ścinania dla parametru  $f/l=0,1$  przy dopuszczalnej różnicy w wartościach sił krytycznych 10%.

**3. Comparison of the critical strength of the plate model with the shell model**

Fig. 9 shows the values of the critical strength of the web segment with equal sides of both models depending on the parameter  $f/l$ . On this basis, it can be concluded that in the case of the web segment with equal sides plate model may be used: in the case of a uniform compression for parameter  $f/l = 0.05$ , in the case of a shear for parameter  $f/l = 0.1$  at the limit of the difference in the values 10% of the critical force.



Rys. 9. a) równomierne ściskanie, b) ścinanie – porównanie wartości sił krytycznych segmentu o równych bokach dla obu modeli.  
 Fig. 9. a) uniform compression, b) shear – comparison of the critical forces of the segment with equal sides for both models.

**Literatura • References**

[1] Abbas H., Sause R., Driver R., (2006), *Behavior of Corrugated Web I-Girders under In-Plane Loads*, J. Eng. Mech., 132(8), 806–814.  
 [2] Hassanein M. F., Kharoob O. F., (2013), *Behavior of bridge girders with corrugated webs: (I) Real boundary condition at the juncture of the web and flanges*, Engineering Structures, 57, 554-564.  
 [3] Kączkowski Z., (2000), *Płyty - Obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa.  
 [4] Kozłowski A., Ślęczka L., (2007), *Stan awaryjny konstrukcji dachowej z ryglami o falistym środniku*, XXIII Konferencja, Awaryjne budowlane, Szczecin-Międzyzdroje, maj 2007, str. 623-630.  
 [5] Kuchta K., (2007), *Design of Corrugated Webs under Patch Load*, Journal of Advanced Steel Construction, vol.3, No.4, 2007, s.737-751.  
 [6] Kuchta K., (2011), *Instability of compressed flanges in girders with sinusoidally corrugated Web*, XII Międzynarodowa Konferencja Nauk.-Tech. "Konstrukcje Metalowe Wrocław 2011"