

Wpływ sprężystości podparcia na wartości własne w słupach o skokowo zmiennej sztywności Influence of elastic support on the eigenvalues of stepped columns

Ewa Nowak¹, Katarzyna Nowak, Paulina Obara

¹*Katedra Mechaniki, Konstrukcji Metalowych i Metod Komputerowych,
Wydział Budownictwa i Architektury, Politechnika Świętokrzyska
Al. 1000-lecia PP 7, 25-323 Kielce
e-mail: enowak@tu.kielce.pl*

¹*Department of Structure Mechanics, Metal Structures and Computer Methods,
Faculty of Civil Engineering and Architecture, Technological University of Kielce
Al. 1000-lecia PP 7, 25-323 Kielce*

Streszczenie

Przedmiotem artykułu jest analiza wpływu sztywności sprężystego zamocowania słupa o skokowo zmiennym przekroju poprzecznym na częstości drgań własnych oraz na wartości obciążeń krytycznych. Przeprowadzona została ścisła analiza stateczności i analiza dynamiczna przy użyciu ciągłego rozkładu masy. Wyznaczone zostały obszary bezpieczne oraz wartości częstości drgań własnych dla różnych warunków podparcia słupa.

Abstract

The paper analyses the influence of the stiffness of the elastic support of the stepped column on the natural vibration frequency and the critical load values. The exact stability analysis and dynamic analysis using a continuous mass distribution were carried out. The safe areas and the natural frequency for different column support conditions were determined.

Słowa kluczowe: siła krytyczna, częstość drgań własnych, słupy o skokowo zmiennej sztywności, podpory sprężyste
Keywords: critical force, natural frequency, stepped columns, elastic supports

1. Wstęp

Zagadnienia stateczności i drgań harmoniczných belek należą do klasycznych problemów mechaniki konstrukcji. Liczne prace poświęcone są analizie belek i słupów o zmiennym przekroju poprzecznym. Począwszy od podstawowej pozycji [1], w której został wyprowadzony wzór na siłę krytyczną dla swobodnie podpartego słupa o zmiennym przekroju poprzecznym, a skończywszy na współczesnych rozważaniach [2-6]. W pracach tych analizowano wpływ zmiany przekrojów segmentów oraz obciążenia siłą osiową na drgania własne belki. Rozpatrywane były konstrukcje dwu i wielosegmentowe, a przeprowadzane analizy miały zarówno charakter dokładny jak i przybliżony.

W rozważaniach inżynierskich podczas analiz istotne znaczenie ma uwzględnienie sztywności zamocowania elementów konstrukcji [7,8]. Przedmiotem pracy jest oszacowanie wpływu sztywności zamocowania na obciążenia krytyczne i częstości drgań własnych słupów niepryzmatycznych. Zaproponowane w pracy podejście ma charakter ścisły i umożliwia oszacowanie wartości własnych dla dowolnych sztywności zamocowania. W celu znalezienia rozwiązań wykorzystano środowisko Mathematica. Przedstawione wyniki dotyczą słupa składającego się z dwóch segmentów, przy czym metodę tę można zastosować do analizy słupów wielosegmentowych.

2. Sformułowanie problemu

Przedmiotem rozważań jest, wykonany z izotropowego, liniowo sprężystego materiału, słup o zmiennym skokowo przekroju poprzecznym (Rys. 1a). Założono, że segmenty słupa

1. Introduction

The analyses of stability and harmonic vibration of beams are regarded as classical problems of structural mechanics. In numerous studies, beams and columns with variable cross-sections were analyzed. Those include the fundamental study [1], in which a formula for the critical force in a simply supported stepped column was derived, and also present-day considerations [2-6]. The studies analyzed the impact of cross-section change of segment and loading with axial force on the beam natural vibration. Two-segment and multi-segment structures were considered. Both exact and approximate analyses were performed.

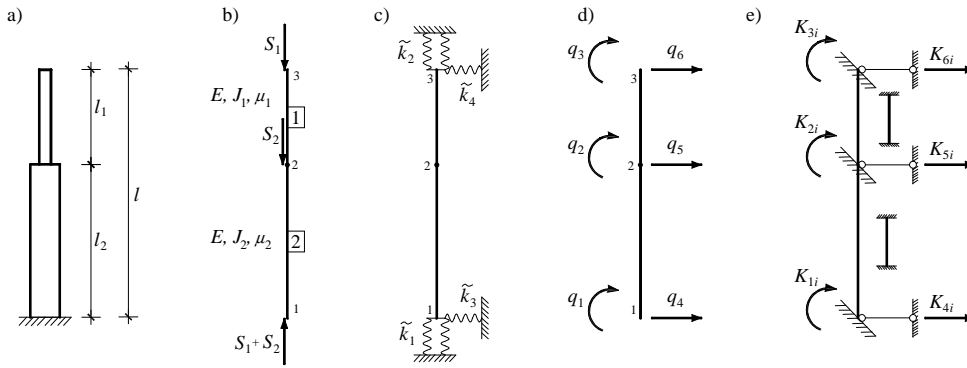
From the engineering standpoint, it is crucial that the stiffness of elastic support of the structure members is accounted for [7,8]. The aim of the paper is to estimate the impact of the elastic support on the critical loads and the natural vibration frequency of non-prismatic columns. An exact approach was proposed in the study. It allows the estimation of eigenvalues for different elastic support. The Mathematica environment was used to find solutions. The results presented in the paper concern a column that consists of two segments. The method, however, is applicable to the analysis of multi-segment columns.

2. Formulation of the problem

The subject of the investigations is a column, made of isotropic, linearly elastic material, with step-variable cross-section (Fig. 1a). It was assumed that the column segments

($i=1,2$) są obciążone siłami osiowymi S_i (Rys. 1b) i przyjęto następujące charakterystyki: E – moduł Younga, J_i – moment bezwładności, l_i – długość, μ_i – masa równomiernie rozłożona na jednostkę długości. W analizie przyjęto sprężyste zamocowanie słupa, uwzględniając zarówno sztywność obrotową \tilde{k}_1, \tilde{k}_2 jak i sztywność liniową: \tilde{k}_3, \tilde{k}_4 (Rys. 1c).

($i=1,2$) are loaded with axial forces S_i (Fig. 1b). The following characteristics were adopted: E – Young modulus of elasticity, J_i – moment of inertia, l_i – length, μ_i – mass uniformly distributed over unit length. In the analysis, in which the elastic support of the column was assumed, both the rotational stiffness \tilde{k}_1, \tilde{k}_2 and the linear stiffness \tilde{k}_3, \tilde{k}_4 were accounted for (Fig. 1c).



Rys. 1. Słup o zmiennym przekroju poprzecznym (a), podział na elementy (b), sprężyste zamocowanie (c), współrzędne uogólnione (d), schemat podstawowy metody przemieszczeń (e).
 Fig. 1. Stepped column (a), division into elements (b), elastic support (c), generalized coordinates (d), basic scheme of the displacement method (e).

Dla tak sformułowanego zadania przeprowadzono analizę drgań harmoniczných z uwzględnieniem sił osiowych, przy zachowaniu rzeczywistego rozkładu pola masowego. W takim przypadku matematycznym modelem procesu jest równanie:

For the so formulated problem, the analysis of harmonic vibration was performed. In the analysis, axial forces were accounted for and the real distribution of the mass was maintained. In such a case, the mathematical model of the process is given by the following equation:

$$\mathbf{K}(\sigma_i, \lambda_i) \mathbf{q} = 0 \tag{1}$$

gdzie: \mathbf{q} jest wektorem współrzędnych uogólnionych (Rys. 1d), a $\mathbf{K}(\sigma_i, \lambda_i)$ – globalną macierzą sztywności dynamicznej rozpatrywanego układu, uwzględniającą wpływ sił osiowych N_i . Wyrazy tej macierzy zależą od bezwymiarowych parametrów opisujących odpowiednio intensywność siły osiowej N_i oraz częstość drgań własnych ω .

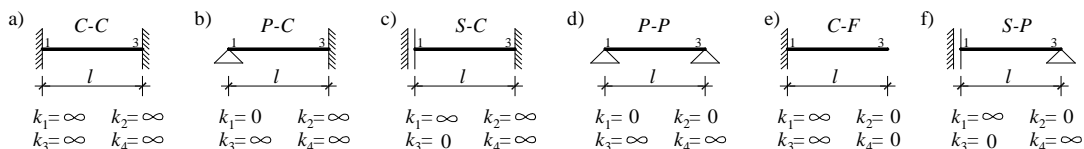
where \mathbf{q} is the vector of generalized coordinates (Fig. 1d), and $\mathbf{K}(\sigma_i, \lambda_i)$ is the global dynamic stiffness matrix of the construction, which accounts for the impact of axial forces N_i . The terms of the matrix depend on the dimensionless parameters that describe the axial force intensity N_i and the natural vibration frequency ω respectively:

$$\sigma_i^2 = \frac{N_i l_i^2}{E J_i}, \quad \lambda_i^4 = \frac{\mu_i \omega^4 l_i^4}{E J_i}; \quad i=1,2, \quad N_1 = S_1, \quad N_2 = (S_1 + S_2) \tag{2}$$

a wyznaczamy je w kolejnych etapach jednostkowych, w których nadajemy wprowadzonym więzom (Rys. 1e) jednostkowe przemieszczenia. Analizę prowadzimy stosując wzory transformacyjne poprzecznych drgań harmoniczných z uwzględnieniem sił osiowych [9]. Niezerowe rozwiązania równania (1) odpowiadają zerowaniu się wyznacznika podstawowego macierzy sztywności:

The matrix terms are determined in successive unit stages, in which unit displacements are ascribed to the imposed constraints (Fig. 1e). The analysis is performed using transformation formulas of the transverse harmonic vibration while taking into account axial forces [9]. Non zero-solutions to eq. (1) correspond to the zeroing of the basic determinant of the stiffness matrix:

$$|\mathbf{K}(\sigma_i, \lambda_i)| = 0 \tag{3}$$



Rys. 2. Wartości sztywności zamocowania k_i dla różnych warunków podparcia słupa.
 Fig. 2. Values of support stiffness k_i for different support conditions of the column.

Warunek (3) prowadzi do wyznaczenia: obciążeń krytycznych ($\lambda_i=0$), częstości drgań własnych ($\sigma_i=0$) oraz zależności częstości drgań od sił ściskających dla dowolnych

Condition (3) leads to the determination of the following: critical loads ($\lambda_i=0$), natural vibration frequency ($\sigma_i=0$), and also vibration frequency dependence on compressive forces for

wartości sztywności zamocowania (Rys. 2). Analiza przeprowadzona została w bazie bezwymiarowych parametrów opisujących zarówno charakterystyki słupa tj. stosunek: sztywności, mas, sił osiowych, długości jak i sposób podparcia:

$$\kappa = \frac{J_2}{J_1}, m = \frac{\mu_2}{\mu_1}, s = \frac{N_2}{N_1}, \xi = \frac{l_2}{l_1 + l_2}, k_1 = \frac{\tilde{k}_1 l_1}{EJ_1}, k_2 = \frac{\tilde{k}_2 l_1}{EJ_1}, k_3 = \frac{\tilde{k}_3 l_1^3}{EJ_1}, k_4 = \frac{\tilde{k}_4 l_1^3}{EJ_1} \quad (4)$$

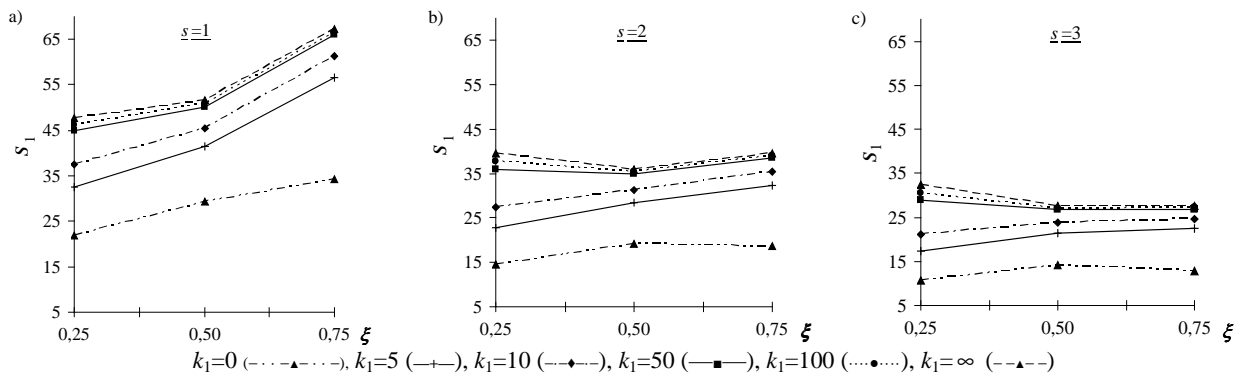
2.1. Analiza stateczności

Przeprowadzając analizę stateczności początkowej możemy wyznaczyć krytyczne wartości obciążenia oraz obszary bezpieczne na płaszczyźnie parametrów S_1 i S_2 (wartości sił S_1 i S_2 , dla których słup znajduje się w równowadze statecznej) w funkcji parametru sztywności zamocowania k_i . Analizę można przeprowadzać dla dowolnych charakterystyk geometrycznych segmentów. Przykładowo na rysunku 3 przedstawiono jak zmienia się wartość obciążenia krytycznego $S_1 [EJ_1/l_1^2]$ w zależności od stosunku długości segmentów ξ dla różnych wartości sztywności podparcia k_1 . Rozpatrzone zostały trzy przypadki: $s=1$ ($S_2=0$), $s=2$ ($S_2=S_1$), $s=3$ ($S_2=2S_1$), przy założeniu, że stosunek momentów bezwładności κ wynosi 2.

different values of support stiffness (Fig. 2). The analysis was performed on the dimensionless parameters that describe both the column characteristics, i.e. stiffness, mass, axial forces, length ratios, and also the manner of support:

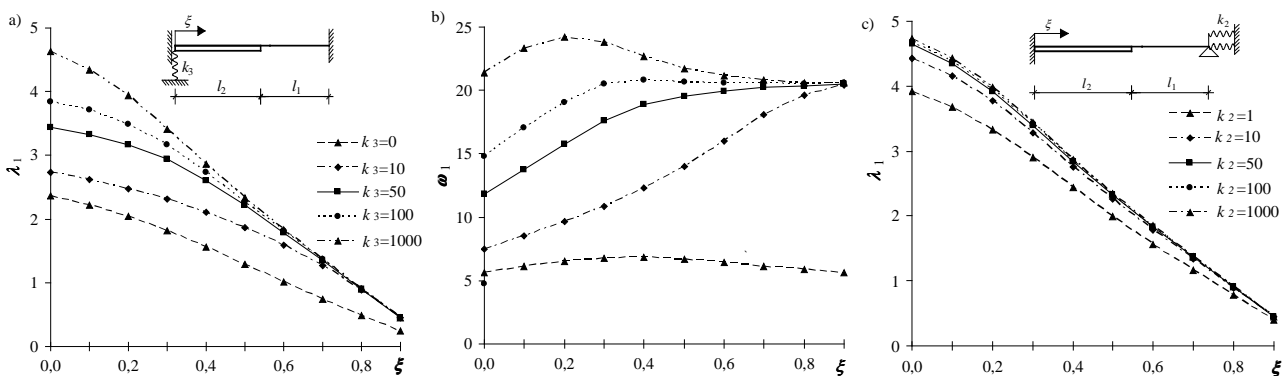
2.1. Stability analysis

When the initial stability analysis is performed, it is possible to determine the critical load values and safe areas on the plane of S_1 and S_2 parameters (values of S_1 and S_2 forces, for which the column is in the static equilibrium) as a function of the support stiffness parameter k_i . The analysis can be carried out for arbitrary geometric characteristics of the segments. Fig. 3, for instance, shows the variation in the critical load value $S_1 [EJ_1/l_1^2]$ depending on the segment length ratio ξ for different values of the support stiffness k_1 . Three cases were considered: $s=1$ ($S_2=0$), $s=2$ ($S_2=S_1$), $s=3$ ($S_2=2S_1$), and the assumption was made that the ratio of the inertia moments κ is 2.



Rys. 3. Wykres zależności $S_1(\xi) [EJ_1/l_1^2]$ dla zmieniającej się sztywności zamocowania k_1 .

Fig. 3. The graph of the dependence $S_1(\xi) [EJ_1/l_1^2]$ for variation in the support stiffness k_1 .



Rys. 4. Wykres zależności $\lambda_1(\xi)$ (a, c) oraz $\omega_1(\xi) [EJ_1/\mu_1 l_1^4]$ (b) dla zmieniającej się sztywności zamocowania k_3 i k_2 .

Fig. 4. The graph of the dependence $\lambda_1(\xi)$ (a, c) and $\omega_1(\xi) [EJ_1/\mu_1 l_1^4]$ (b) for variation in the support stiffness k_3 and k_2 .

2.2. Analiza dynamiczna

Analiza dynamiczna prowadzi do wyznaczenia częstości drgań własnych ω w funkcji parametru sztywności zamocowania k_i . W pracy sporządzono wykresy zależności parametru λ_1 od stosunku długości segmentów ξ dla zmieniających się sztywności zamocowania: k_3 i k_2 (Rys. 4a,b).

2.2. Dynamic analysis

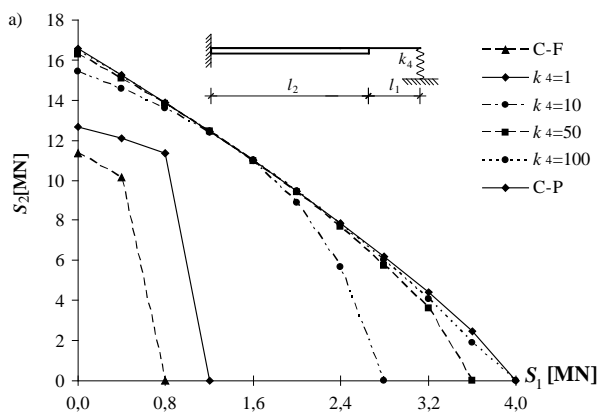
The dynamic analysis leads to the determination of the natural vibration frequency ω as a function of the support stiffness parameter k_i . The paper provides the graphs of the parameter λ_1 dependence on the segment length ratio ξ for varied support stiffness: k_3 and k_2 (Fig. 4a,b). The results for the

Przedstawiono wyniki dla przypadku: $m=2$, $\kappa=2$. Jak widać wraz ze wzrostem parametru ξ – λ_1 maleje. Na rysunku 4c pokazano zależność $\omega_1(\xi)$ dla zmieniającej się sztywności zamocowania k_3 (częstość jest wyrażona w $[EJ_1/\mu_1 l^4]$).

3. Przykład

W rozdziale tym przeprowadzono analizę stateczności i analizę dynamiczną dla przykładowego słupa stalowego o skokowo zmiennym przekroju poprzecznym. Przyjęto następujące dane materiałowe i geometryczne: $E=210$ [GPa], $l_1=4,45$ [m], $J_1=3300$ [cm⁴], $\mu_1=63,2$ [kg/m], $l_2=7,4$ [m], $J_2=120000$ [cm⁴], $\mu_2=169$ [kg/m]. Dla przyjętych danych otrzymano wartości bezwymiarowych parametrów: $\xi=0,62$, $\kappa=36,4$, $m=2,67$, które określają odpowiednio stosunek długości, sztywności i mas segmentów.

Na rysunku 5a przedstawiono obszary bezpieczne na płaszczyźnie S_1 i S_2 w zależności od zmieniającej się sztywności zamocowania k_4 , natomiast rysunek 5b ilustruje wpływ sztywności zamocowania k_i na wartości pierwszej częstości drgań własnych.

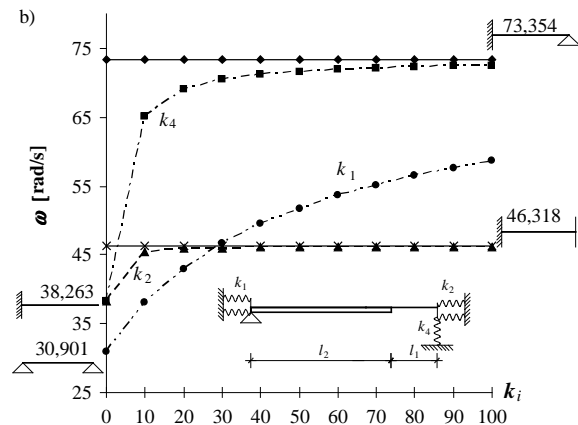


case: $m=2$, $\kappa=2$ are presented. It can be seen that λ_1 decreases when the parameter ξ grows. Fig. 4c shows the dependence $\omega_1(\xi)$ for varied support stiffness k_3 (the frequency is expressed in $[EJ_1/\mu_1 l^4]$).

3. Example

The stability analysis and dynamic analysis for exemplary steel stepped column were carried out. The following material and geometric data were taken into account: $E=210$ [GPa], $l_1=4.45$ [m], $J_1=3300$ [cm⁴], $\mu_1=63.2$ [kg/m], $l_2=7.4$ [m], $J_2=120000$ [cm⁴], $\mu_2=169$ [kg/m]. For the adopted data, the non-dimensional parameters $\xi=0.62$, $\kappa=36.4$, $m=2.67$ were obtained. They describe the ratio of the length, the ratio of stiffness and the ratio of mass of segments, respectively.

Fig. 5a shows safe areas on the plane S_1 and S_2 , depending on the support stiffness k_4 . The influence of the support stiffness k_i on the values of the first natural frequency is shown in Fig. 5b.



Rys. 5. Obszary bezpieczne (a) oraz pierwsze częstości drgań własnych (b) w zależności od sztywności zamocowania k_i .
 Fig. 5. Safe areas (a) and first natural frequencies (b) depending on the support stiffness k_i .

Literatura • References

[1] Timoshenko S. P., Gere J. M. A., (1963) *Teoria stateczności sprężystej*, Wydawnictwo Arkady, Warszawa 1963.
 [2] Zamojska I. Kukla S., (2002) *Zastosowanie metody funkcji Greena w analizie drgań belek o zmiennym przekroju poprzecznym z elementami dyskretnymi*, Prace Naukowe Instytutu Matematyki i Informatyki Politechniki Częstochowskiej, nr 1(1), s.85-92.
 [3] Zamojska I. Kukla S., (2003) *Drgania swobodne belki o zmiennym przekroju poprzecznym obciążonej siłą osiową*, Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej Politechniki Śląskiej nr 20, s.456-462.
 [4] Bellés P.M., Maurizi M.J., di Luca D.H., (1994) *Vibration of stepped beams on non-uniform elastic foundations*, *Journal of Sound and Vibration* 1994, 196(1), pp.127-128.
 [5] Jang S.K., Bert C.W., (1989) *Free vibration of stepped beams: exact and numerical solutions*, *Journal of Sound and Vibration*, 130(2), pp.42-346.
 [6] Rahman, M. A., Chowdhuri, A. K., (2012), *Modelling of an imperfect column having variable cross-sections and non-symmetric responses in tension and compression*, *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 17, no 2, pp. 439-457.
 [7] Basiński W., Kowal Z., Obara P., (2009) *Zamocowanie dźwigarów stalowych – diagnostyczne oszacowanie sztywności*, *Obiekty inżynierskie*, nr 3/2009(3), s.31-37.
 [8] Potrzyszcz-Sut B., Dudzik A., (2013) *Influence of connections stiffness on critical load capacity and natural vibration frequency of bar structures*, 10th European conference of young researchers and scientists. University of Žilina, Slovak Republic, Transcom 2013.
 [9] Obara P., (2011), *Metoda przemieszczeń w analizie konstrukcji prętowych*, Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce.