

Wyboczenie słupów o skokowo zmiennej sztywności giętnej Buckling of columns of stepwise variable bending stiffness

Jakub Marcinowski¹

¹Zakład Konstrukcji Budowlanych, Instytut Budownictwa,
Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska, Uniwersytet Zielonogórski
ul. Szafrana 1, 65-516 Zielona Góra
e-mail: j.marcinowski@ib.uz.zgora.pl

¹Department of Building Structures, Institute of Building Engineering
Faculty of Civil and Environmental Engineering, University of Zielona Góra
Szafrana 1, 65-516 Zielona Góra, POLAND
e-mail: j.marcinowski@ib.uz.zgora.pl

Streszczenie

Słupy o skokowo zmiennej sztywności giętnej są dość często spotykane w praktyce inżynierskiej. Przedmiotem rozważań są dwa następujące przypadki obciążenia: pierwszy, siła działa wyłącznie na końcu słupa, drugi, poza siłą działającą na koniec słupa działa jeszcze dodatkowa siła w miejscu gwałtownej zmiany przekroju. Aby poprawnie zaprojektować takie słupy potrzebna jest znajomość wyrażań na siły krytyczne. W pracy wyprowadzono i zaprezentowano wzory analityczne na siły krytyczne dla słupa podpartego przegubowo. W wyprowadzeniach uwzględniono teorię Eulera-Bernoulliego zginania prętów. Jako kryterium wyboczenia wykorzystano energetyczne kryterium Timoszenki (por. [1] i [2]). Oba wzory otrzymano w postaci ilorazów Rayleigha. Poprawność wzorów zweryfikowano na podstawie równań przestępnych wyprowadzonych z różniczkowych równań stateczności i przedstawionych w [1]. Wyprowadzone wzory na siły krytyczne mogą być bezpośrednio wykorzystane przez projektantów w procedurach oszacowania nośności wyboczeniowej.

Abstract

Columns of stepwise variable bending stiffness are encountered in the engineering practice quite often. Two different load cases are considered: firstly, the load acting only at the end of column, secondly, besides the force acting at the end, the additional force is acting at the place where the section changes suddenly. Expressions for critical forces for these two cases of loading are required to design correctly such columns. In this paper analytical formulae for critical forces for pin ended column are derived and presented. Derivations were based on the Euler-Bernoulli theory of beams. The energetic criterion of Timoshenko (cf. [1] and [2]) was adopted as the buckling criterion. Both formulae were obtained in the form Rayleigh quotients. The correctness of formulae were verified on the basis of transcendental equations derived from differential equations of stability and presented in [1]. The derived formulae on the critical forces can be directly used by designers in procedures leading to the buckling resistance assessment.

Słowa kluczowe: słupy dwustopniowe, wyboczenie, nośność, siła krytyczna
Keywords: two step columns, buckling, resistance, critical force

1. Wstęp

Słupy o skokowo zmiennej sztywności giętnej dość często występują w praktyce inżynierskiej. Najbardziej typowym przypadkiem są słupy stalowych hal przemysłowych. Słup w hali z suwnicą natorową spełnia podwójną rolę: podpira konstrukcję dachu, i przenosi obciążenia od suwnicy. Przykładowe rozwiązania słupów wewnętrznych w przemysłowych halach wielonawowych pokazano na Rys. 1. W przypadku występowania suwnicy słup jest obciążony siłą działającą na końcu oraz dodatkową siłą przyłożoną w miejscu naglej zmiany przekroju. Poprawne zaprojektowanie takich słupów wymaga znajomości siły krytycznej wywołującej wyboczenie giętne. W powszechnie dostępnej literaturze z mechaniki czy z zakresu konstrukcji brak zamkniętych wzorów opisujących krytyczną wartość obciążenia dla prętów ściskanych o skokowo zmiennej sztywności jak te pokazane na Rys. 2.

W pracy zaprezentowano wyprowadzenia wyrażań na siły krytyczne dla słupów pokazanych na Rys. 2. W wyprowadzeniach tych wykorzystano energetyczne kryterium

1. Introduction

Columns of stepwise variable bending stiffness are quite often encountered in the engineering practice. Columns of steel industrial halls are probably the most typical cases. The column in a hall with a crane girder plays the double role: supports the roof structure and carries loadings from the crane. Exemplary solutions of inner columns in industrial multi-nave halls were shown in Fig. 1. In this case when the crane girder is present, the column is loaded at the end and additionally at the place of the sudden change of section. The correct design of such columns requires the knowledge of the critical force causing the bending buckling. In the widely available literature relating to the mechanics or structural problems there is a shortage of closed formulae describing the critical force of compressed rods of stepwise variable bending stiffness like these shown in Fig. 2.

Expressions for critical forces for columns shown in Fig. 2 were derived in the paper. In these derivations the energetic stability criterion of Timoshenko [2] was exploited. Bending functions evoked by uniformly distributed lateral loading were

Timoszenki [2] przy czym za formę wybożenia wybierano funkcję ugięcia od obciążenia równomiernie rozłożonego. Rozwiązanie otrzymywano w postaci ilorazu Rayleigha.



used as the buckling modes. Final solutions were obtained always in the form of Rayleigh quotient.



Rys. 1. Przykłady słupów dwustopniowych.
Fig. 1. Examples of two step columns

Otrzymane wzory zweryfikowano rozwiązaniem analitycznym prezentowanym w monografii Wolmira [1], a otrzymanym z różniczkowych równań stateczności prętów. Rozwiązanie to prowadzi do równania przestępnego na siłę krytyczną.

Obtained formulae were verified by means of the analytical solution presented in the book of Volmir [1]. This solution, received from differential equations of stability leads to the transcendental equation in which the critical force is the unknown.

2. Słup obciążony siłą przyłożoną na końcu

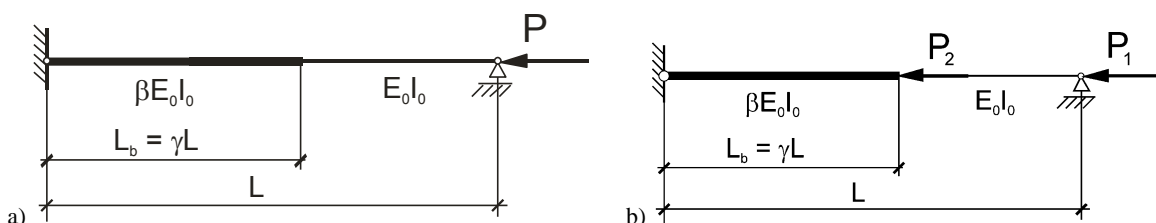
2. The column loaded by a force applied at the end

Siłę krytyczną w słupie pokazanym na Rys. 2a można określić drogą rozwiązania równania przestępnego (Wolmir [1]). Dla praktykującego inżyniera nie jest to czynność prosta. W pracy zaprezentowano wzór autorski pozwalający określić wartość siły krytycznej w pręcie dwustopniowym o schemacie pokazanym na Rys. 2a. Wzór ten wyprowadzono stosując energetyczne kryterium Timoszenki [2] prowadzące do wzoru Rayleigha. Funkcję wybożenia niezbędną w tym podejściu przyjęto w postaci funkcji ugięcia od stałego obciążenia równomiernie rozłożonego, działającego poprzecznie do osi pręta.

The critical force in the column shown in Fig. 2a one can determine solving the transcendental equation (cf. Volmir [1]). This task is not easy for a practicing engineer. The closed author's formula was presented in the paper. It allows determination of the critical force in the two step column shown in Fig. 2a. This formula was derived on the basis of the energetic criterion of Timoshenko [2] which leads to the Rayleigh formula. The buckling mode function required in this approach was adopted as the bending function evoked by uniformly distributed lateral loading acting on this rod.

Zakładając, że znane są parametry β i γ , długość całkowita L oraz sztywność giętą E_0I_0 , siłę krytyczną można wyznaczyć ze wzoru:

Assuming that both parameters β and γ , the total length of the rod L and the bending stiffness E_0I_0 are known, the critical force can be determined from the formula:



Rys. 2. Słupy o skokowo zmiennej sztywności giętnej.
Fig. 2. Columns of the stepwise variable bending stiffness.

$$P_{kr} = \frac{F_g}{F_d} \frac{E_0 I_0}{L^2}, \tag{1}$$

przy czym

where

$$F_g(\beta, \gamma) = 18\beta[\beta^2(315\gamma^3 + 255\gamma^2 + 85\gamma + 17)(\gamma - 1)^5 - 70\beta\gamma^3(9\gamma^2 - 9\gamma - 4)(\gamma - 1)^3 + \gamma^5(315\gamma^3 + 1540\gamma - 1200\gamma^2 - 672)] \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 F_d(\beta, \gamma) = & \beta^3 (1890\gamma^4 + 1890\gamma^3 + 868\gamma^2 + 217\gamma + 31)(\gamma - 1)^7 + \\
 & 42\beta\gamma^5 (135\gamma^3 + 149\gamma - 315\gamma^2 + 48)(\gamma - 1)^3 - \\
 & 42\beta^2 (\gamma - 1)^5 \gamma^3 (135\gamma^3 - 76\gamma - 90\gamma^2 - 17) + \\
 & \gamma^7 (9450\gamma^3 + 15183\gamma - 17878\gamma^2 - 1890\gamma^4 - 4896)
 \end{aligned} \tag{3}$$

Przykład praktycznego wykorzystania tego wzoru oraz sprawdzenia jego dokładności zaprezentowano w referacie [3].

The example of a practical use of this formula and the verification of its precision was presented in [3].

3. Słup z dodatkową siłą w przęśle

Rozpatrzmy przypadek pokazany na Rys. 2b. Niech siły P_1 i P_2 wiąże zależność: $P_2 = \alpha P_1$, przy czym α musi być dane. Postępowanie analogiczne do przedstawionego w p. 2 prowadzi do następującego wyrażenia na siłę krytyczną:

3. The column with the additional force acting at the column's span

Let us consider the case shown in Fig. 2b. Let forces P_1 and P_2 are tied by the relation: $P_2 = \alpha P_1$, where α must be given. The analogous procedure like this described in the clause 2 leads to the following formula on the critical force:

$$P_{1,cr} = \frac{P_g}{P_d} \frac{E_0 I_0}{L^2}, \tag{4}$$

w którym

in which

$$\begin{aligned}
 P_g = & 18\beta \{ \gamma^5 [672 - 1540\gamma + 1200\gamma^2 - 315\gamma^3 + \alpha(672 - 2100\gamma + 2600\gamma^2 - 1470\gamma^3 + \\
 & 315\gamma^4)] - 70\beta [\alpha(\gamma - 1) - 1](\gamma - 1)^3 \gamma^3 (9\gamma^2 - 9\gamma - 4) + \beta^2 (\gamma - 1)^5 [315\alpha\gamma^4 - 105(\alpha + 3)\gamma^3 \\
 & - 5(35\alpha + 51)\gamma^2 - 5(7\alpha + 17)\gamma - 17] \}
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 P_d = & -\beta^3 (\gamma - 1)^7 [31 + 7(31 + 18\alpha)\gamma + 14\gamma^2 (62 + 63\alpha + 15\alpha^2) + 42\gamma^3 (45 + 51\alpha + 20\alpha^2) - \\
 & 210\gamma^4 (2\alpha^2 - 3\alpha - 9) - 1260\alpha\gamma^5 (2\alpha + 3) + 1890\alpha^2 \gamma^6] + \\
 & 42\beta^2 \gamma^3 (\gamma - 1)^5 [135\gamma^3 - 90\gamma^2 - 76\gamma - 17 + 5\alpha^2 (\gamma - 1)^2 (27\gamma^3 - 21\gamma^2 - 13\gamma - 1) - \\
 & \alpha(270\gamma^4 - 465\gamma^3 + 54\gamma^2 + 119\gamma + 22)] - \\
 & 42\beta\gamma^5 (\gamma - 1)^3 [135\gamma^3 - 315\gamma^2 + 149\gamma + 48 - 3\alpha(90\gamma^4 - 295\gamma^3 + 303\gamma^2 - 70\gamma - 32) \\
 & + \alpha^2 (135\gamma^5 - 570\gamma^4 + 880\gamma^3 - 554\gamma^2 + 61\gamma + 48)] + \\
 & \gamma^7 [1890\gamma^4 - 9450\gamma^3 + 17878\gamma^2 - 15183\gamma + 4896 - 2\alpha(1890\gamma^5 - 11025\gamma^4 + 26019\gamma^3 \\
 & - 31234\gamma^2 + 19215\gamma - 4896) + \alpha^2 (1890\gamma^6 - 12600\gamma^5 + 35490\gamma^4 - 54348\gamma^3 + 47950\gamma^2 - \\
 & 23247\gamma + 4896)]
 \end{aligned} \tag{6}$$

Wzory te można stabilizować lub zilustrować w postaci nomogramów by po ewentualnej interpolacji otrzymać poszukiwaną wartość obciążenia krytycznego.

Ponizej przedstawiono tablicę z wartościami P_g/P_d dla $\alpha = 0,5$ i dla różnych wartości β i γ , a na Rys. 3 wykresy otrzymane na podstawie tych wartości.

Poprawność wyprowadzonego wzoru można zweryfikować na podstawie równania przestępnego podanego przez Wolmira [1]. Po podstawieniu danych korespondujących z Rys. 2b do równania podanego w [1] otrzymujemy równanie przestępne w następującej postaci (x jest niewiadomą):

These formulae can be entered into a table or illustrated in a form of nomogram plots from which after an eventual interpolation the critical value of the force can be found.

The table with P_g/P_d values for $\alpha = 0,5$ and for different values of β and γ was presented below. Plots obtained on the basis of this values were presented in Fig. 3

The correctness of the formula can be verified on the basis of the transcendental equation given by Volmir [1]. Substituting to this equation data corresponding to Fig. 2b one can obtain the following transcendental equation in which x is the searched unknown:

$$\alpha - x \frac{1 + \alpha(1 - \gamma)}{\operatorname{tg}[x(1 - \gamma)]} = \frac{\alpha}{1 + \alpha} + \frac{x}{\beta} \frac{1 + \alpha(1 - \gamma)}{\sqrt{\frac{1 + \alpha}{\beta}} \operatorname{tg}[x\gamma \sqrt{\frac{1 + \alpha}{\beta}}]} \tag{7}$$

Po rozwiązaniu tego równania przestępnego dla danych α , β i γ poszukiwaną wartość krytyczną siły P_1 znajdujemy z zależności $P_1 = x^2 \frac{EJ_0}{L^2}$. Siła tej towarzyszy zawsze siła $P_2 = \alpha P_1$. Jako przykład wykorzystania równania przestępnego (7) rozważmy przypadek: $\alpha = 0,5$, $\beta = 1,5$, $\gamma = 0,5$. Z równania

After the solution of this transcendental equation for given α , β and γ one can find the critical value of the force P_1 from the relationship $P_1 = x^2 \frac{EJ_0}{L^2}$. This force is always accompanied by the force $P_2 = \alpha P_1$. As the example of utilisation of the equation (7) let us consider the case: $\alpha = 0,5$, $\beta = 1,5$, $\gamma = 0,5$.

(7) otrzymamy $x = 3,08902$.

Wtedy $P_1 = 9,5420 \frac{EJ_0}{L^2}$, $P_2 = 4,7710 \frac{EJ_0}{L^2}$.

Dla tego przypadku, z wyprowadzonego wzoru dostajemy (por. Tabela 1) wartość 9,55. Błąd na poziomie 0,1% świadczy o bardzo dużej dokładności otrzymanych wzorów.

Tabela 1. Wartości P_g/P_d dla $\alpha = 0,5$ i różnych wartości β i γ .

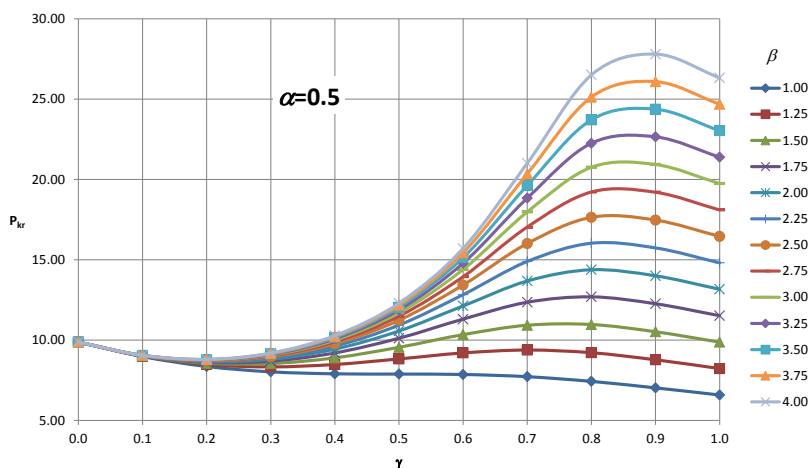
Table 1. Values P_g/P_d for $\alpha = 0,5$ and for different values β and γ .

$\beta \backslash \gamma$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
1.00	9.87	8.97	8.35	8.02	7.90	7.88	7.86	7.72	7.43	7.02	6.58
1.25	9.87	8.99	8.48	8.33	8.48	8.82	9.20	9.38	9.21	8.77	8.23
1.50	9.87	9.01	8.56	8.54	8.89	9.55	10.34	10.92	10.97	10.52	9.87
1.75	9.87	9.02	8.61	8.69	9.20	10.11	11.30	12.35	12.69	12.26	11.52
2.00	9.87	9.02	8.66	8.80	9.43	10.57	12.12	13.68	14.38	14.00	13.16
2.25	9.87	9.03	8.69	8.89	9.62	10.93	12.82	14.89	16.03	15.74	14.81
2.50	9.87	9.03	8.71	8.96	9.77	11.23	13.43	16.01	17.64	17.47	16.45
2.75	9.87	9.04	8.74	9.01	9.89	11.48	13.94	17.03	19.22	19.20	18.10
3.00	9.87	9.04	8.75	9.06	10.00	11.70	14.39	17.97	20.75	20.93	19.74
3.25	9.87	9.04	8.77	9.10	10.08	11.88	14.79	18.83	22.25	22.65	21.39
3.50	9.87	9.05	8.78	9.14	10.16	12.04	15.13	19.62	23.71	24.37	23.03
3.75	9.87	9.05	8.79	9.17	10.22	12.17	15.44	20.34	25.12	26.09	24.68
4.00	9.87	9.05	8.80	9.19	10.28	12.29	15.71	21.01	26.50	27.80	26.32

From the equation (7) we receive $x = 3,08902$.

Hence $P_1 = 9,5420 \frac{EJ_0}{L^2}$, $P_2 = 4,7710 \frac{EJ_0}{L^2}$.

For this very case, from the derived formula we receive (cf. Table 1) the value 9.55. The error on the level of 0.1% confirms the high accuracy of the obtained formulae.



Rys. 3. Wartości P_g/P_d dla $\alpha = 0,5$ i różnych wartości β i γ

Fig. 3. Values P_g/P_d for $\alpha = 0,5$ and for different values of β and γ

4. Podsumowanie

Wzory wyprowadzone w pracy mogą stanowić cenną pomoc dla projektantów zajmujących się projektowaniem konstrukcji metalowych. Wzory te wymagają starannego przepisania do arkusza kalkulacyjnego lub programu służącego do przekształceń symbolicznych. Po podstawieniu konkretnych wartości za parametry korespondujące z danym przypadkiem dwustopniowego słupa ściskanego otrzymuje się wartość obciążenia krytycznego, która jest podstawą oszacowania nośności wybowoczeniowej słupa.

4. Recapitulation

Formulae derived in the paper can be a valuable assistance for designers engaged in designing of metal structures. To use them one should copy them into a spreadsheet or into a software serving to symbolic computations. After substitution of specific values for particular parameters corresponding to the given case of two step compressed column, one can obtain the critical value of the force. This value is the basis for determination of the buckling resistance of the column.

Literatura • References

[1] Wolmir A., S., (1967), *Ustojcziwost dieformirujemych sistem*, Nauka, Moskwa.
 [2] Timoszenko S. P., Gere J. M. (1963), *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, Warszawa.
 [3] Marcinowski J., Różycki Z. (2010), *Oszacowanie nośności wybowoczeniowej słupów żeliwnych w rewitalizowanych obiektach historycznych*, w 56 Konf. KILiW PAN oraz KN PZITB, Kielce-Krynica 2010, str. 683÷690.