

# Moment krytyczny zwichrzenia niestężonych dwuteowników monosymetrycznych podpartych widełkowo

## The lateral buckling moment of simply supported unrestrained monosymmetric I-shaped beams

Roman Bijak

*Katedra Mechaniki, Konstrukcji Metalowych i Metod Komputerowych,  
Wydział Budownictwa i Architektury, Politechnika Świętokrzyska  
Al. 1000-lecia P.P. 7, 25-323 Kielce  
e-mail: r.bijak@wp.pl*

### Streszczenie

W pracy analizowano metodą Bubnowa-Galerkina równanie różniczkowe giętno-skrętnej utraty płaskiej postaci zginania, otrzymane po uwzględnieniu warunków brzegowych dla podparcia widełkowego [2]. Przedstawiono wzory analityczne pozwalające oszacować moment krytyczny zwichrzenia niestężonych belek monosymetrycznych podpartych widełkowo. Każde z obciążeń skupionych i rozłożonych może mieć różny zwrot i różną współrzędną przyłożenia siły po wysokości przekroju poprzecznego. Wyprowadzone wzory pozwalają na prostą i szybką kontrolę poprawności momentu krytycznego oszacowanego za pomocą MES [1].

### Abstract

The stability equations for simply supported beams were solved approximately using the Bubnov–Galerkin method [2]. The analytical solutions was used for checking the stability of laterally unrestrained monosymmetric beams. The lateral buckling moment depends on bending distribution and on the load height effect. Each of applied concentrated and distributed loads, may have arbitrary direction and optional coordinate for the applied force along the cross section's height. Derived equations allow for simple, yet fast control of lateral buckling moment estimated by FEM [1].

*Słowa kluczowe: moment krytyczny zwichrzenia, podparcie widełkowe, monosymetryczne belki dwuteowe, wzory analityczne*

*Keywords: lateral buckling moment, simply supported beams with free warping, monosymmetric I-shaped beams, analytical solution*

### 1. Wstęp

W celu wyznaczenia momentu krytycznego zwichrzenia belek o przekroju monosymetrycznym korzystamy z ogólnie dostępnego programu LTBeam [1]. W prezentowanej pracy przedstawiono bardziej tradycyjną metodę na jego wyznaczenie, opartą na wzorach analitycznych. Jest to uzupełnienie pracy [6], w której rozpatrywano przypadek, gdy obciążenie jest przyłożone na tej samej rzędnej po wysokości przekroju poprzecznego. W tym opracowaniu każde obciążenie może być przyłożone na różnej rzędnej po wysokości przekroju. Jest to istotne rozszerzenie w stosunku do rozwiązań prezentowanych w literaturze, które są ograniczone do podstawowych schematów statycznych [2÷4].

### 2. Sformułowanie problemu

Rozpatrzmy belkę podpartą widełkowo, obciążoną momentami skupionymi na końcach oraz obciążeniem poprzecznym w przęśle (Rys. 1). Każde z obciążeń skupionych i rozłożonych może mieć różną współrzędną przyłożenia siły po wysokości przekroju poprzecznego (środek ciężkości przekroju oznaczono przez  $G$ , natomiast środek ścinania przez  $S$ ).

Po uwzględnieniu warunków brzegowych dla podparcia widełkowego równanie różniczkowe giętno-skrętnej utraty stateczności w zależności od funkcji kąta skręcenia  $\varphi(x)$ , można przedstawić w postaci [2]:

### 1. Introduction

To determine the lateral buckling moment of the monosymmetric I-shaped beams the LTBeam [1] programme is commonly used. The analytical solution of the lateral buckling moment of the monosymmetric I-shaped beams is presented here. It is follow-up of [6]. There, the case was considered, when the load was applied at the same height of the cross section. In this publication arbitrary load may be applied at the optional height of the cross section. Thus, the method presented here is the significant extension, as compared to solutions presented in the literature. As those are limited to basic statical schemes [2÷4].

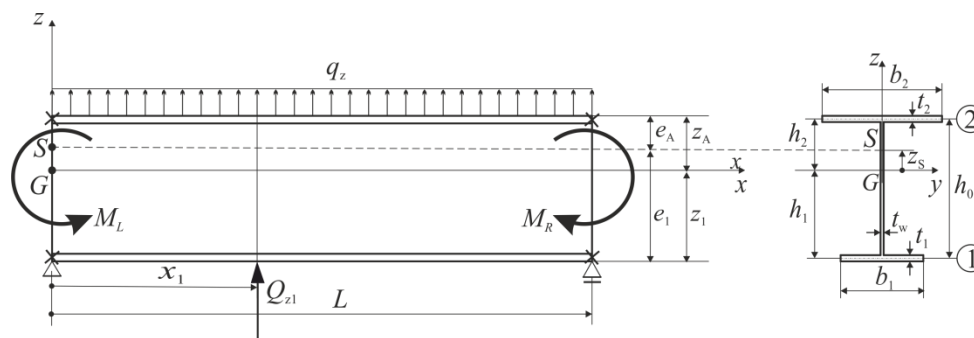
### 3. Statement of the problem

Let's consider the simply supported beam. It is loaded by the moments, which are concentrated at its ends and the lateral load at span (Fig. 1). Any distributed and concentrated loads may have an arbitrary coordinate for the force applied at the height of the lateral cross section. The center of gravity of the cross section is denoted as  $G$ . The shear center is denoted by  $S$ . Considering the boundary conditions for the simply supported beam, the differential equation of the flexural-torsional loss of stability, as the function of the torsion angle  $\varphi(x)$  can be written as [2]:

$$-\frac{M_y^2(x)}{EI_z} \varphi - [2\beta_z M_y(x) \varphi^{(1)}]^{(1)} + q_z(x) e_A \varphi + \sum_{k=1}^N Q_{zk} e_k \Delta(x-x_k) \varphi + EI_w \varphi^{(4)} - GI_T \varphi^{(2)} = 0 \quad (1)$$

gdzie:  $M_y(x)$  – rozkład momentu zginającego po długości belki,  $E, G$  – moduł sprężystości podłużnej i poprzecznej,  $I_z$  – moment bezwładności względem osi  $z$ ,  $I_T$  – moment bezwładności skręcania St. Venanta,  $I_w$  – wycinkowy moment bezwładności,  $q_z(x)$  – obciążenie rozłożone,  $N$  – liczba sił skupionych,  $Q_{zk}$  –  $k$ -ta siła skupiona,  $x_k$  – współrzędna miejsca przyłożenia  $k$ -tej siły skupionej,  $\Delta$  – funkcja Dirac’a,  $\varphi^{(k)} = \partial^k \varphi / \partial x^k$  – oznaczenie pochodnej.

where:  $M_y(x)$  – distribution of the bending moment along the beam,  $E, G$  – Young’s and shear modulus,  $I_z$  – principal moment of inertia about  $z$  axes,  $I_T$  – St. Venant torsion constant,  $I_w$  – warping constant,  $q_z(x)$  – distributed load in the  $z$  direction,  $N$  – the number of condensed forces,  $Q_{zk}$  –  $k^{\text{th}}$  concentrated load in the  $z$  direction,  $x_k$  – coordinate of applied  $k^{\text{th}}$  concentrated load,  $\Delta$  – Dirac’s function,  $\varphi^{(k)} = \partial^k \varphi / \partial x^k$  – denotation of derivative.



Rys. 1. Schemat statyczny: a) dodatnie zwroty obciążenia, b) parametry przekroju poprzecznego.  
 Fig. 1. Statical scheme: a) positive directions of load, b) cross section’s parameters

Wpływ miejsca przyłożenia obciążenia poprzecznego po wysokości przekroju poprzecznego definiujemy względem środka ścinania  $S$ , niepokrywającego się z środkiem ciężkości  $G$  (Rys.1):

$$e_A = z_A - z_S, \quad e_k = z_k - z_S \quad (2ab)$$

Dla dwuteowników monosymetrycznych charakterystyki skrętne możemy wyznaczyć w sposób przybliżony ze wzorów (3,4abc) [3] (półka dwuteownika oznaczona jako 2 jest przyjmowana po dodatniej stronie osi  $z$ ):

$$\beta_z = \frac{1}{2I_y} \left\{ I_{z2} h_2 + A_2 h_2^3 - I_{z1} h_1 - A_1 h_1^3 + \frac{t_w}{4} \left[ (h_2 - \frac{t_2}{2})^4 - (h_1 - \frac{t_1}{2})^4 \right] \right\} - z_S \quad (3)$$

$$z_S = \frac{I_{z2}}{I_{z1} + I_{z2}} h_0 - h_1, \quad I_w = \frac{I_{z1} I_{z2}}{I_{z1} + I_{z2}} h_0^2, \quad I_T = \frac{b_1 t_1^3 + b_2 t_2^3 + h_w t_w^3}{3} \quad (4abc)$$

gdzie:  $A_1 = t_1 b_1$ ,  $I_{z1} = t_1 b_1^3 / 12$ ,  $A_2 = t_2 b_2$ ,  $I_{z2} = t_2 b_2^3 / 12$  ( $h_w$  – wysokość środka,  $I_y$  – moment bezwładności względem osi  $y$ , pozostałe oznaczenia wg Rys. 1).

The influence of placement of the lateral load along the height of the lateral cross section is defined with respect to shear center  $S$ . The shear center  $S$  is not coinciding with the center of gravity  $G$  (Fig. 1):

For the monosymmetric I-shaped beams the torsion characteristic may be approximately determined with equations (3, 4abc) [3] (flange of an I-section beam denoted as 2 is considered at the positive  $z$ -axis):

where:  $A_1 = t_1 b_1$ ,  $I_{z1} = t_1 b_1^3 / 12$ ,  $A_2 = t_2 b_2$ ,  $I_{z2} = t_2 b_2^3 / 12$  ( $h_w$  – web’s height,  $I_y$  – principal moment of inertia about  $y$  axes, remaining notation as in Fig. 1).

#### 4. Moment krytyczny zwichrzenia

W celu oszacowania momentu krytycznego zwichrzenia wykorzystamy metodę ortogonalizacji Bubnowa-Galerkina aproksymując kąt skręcenia przekroju za pomocą jednego wyrazu szeregu trygonometrycznego. Wykonując odpowiednie przekształcenia, otrzymujemy równanie kwadratowe ze względu na maksymalny, co do wartości bezwzględnej, moment zginający  $M_0$  (Rys. 2):

#### 4. The lateral buckling moment

The stability equations (1) were solved approximately using the Bubnov-Galerkin method. In case of simply supported beams with free warping, sinusoidal mode is assumed for the torsion angle. After integration, the lateral buckling moment is given by the roots of the quadratic equation, with regard to the absolute of the maximum bending moment  $M_0$  (Fig. 2):

$$-a_1 M_0^2 + N_{cr,z} (a_{2z} + a_3 \beta_z) M_0 + N_{cr,z}^2 D = 0, \tag{5}$$

gdzie

$$N_{cr,z} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2}, \quad D = \frac{I_w}{I_z} + \frac{GI_T}{N_{cr,z}} \tag{6ab}$$

We wzorze (7a) współczynnik  $a_1$  opisuje wpływ rozkładu momentu zginającego wzdłuż długości elementu, natomiast  $a_2$  miejsce przyłożenia obciążenia poprzecznego według wzoru (7b):

$$a_1 = \frac{2}{M_0^2 L} \int_0^L M_y^2(x) \sin^2(\pi x/L) dx > 0, \quad a_{2z} = \frac{2L}{M_0 \pi^2} \left[ \frac{q_z L}{2} e_A + \sum_{k=1}^N Q_{zk} e_k \sin^2(\pi x_k/L) \right] \tag{7ab}$$

Dla przekrojów monosymetrycznych wyznaczamy dodatkowo współczynnik  $a_3$  ze wzoru (8)

$$a_3 = \frac{M_L + M_R}{M_0} + \frac{L}{M_0 \pi^2} \left\{ q_z L \frac{\pi^2 - 3}{6} + \sum_{k=1}^N Q_{zk} \left[ \pi^2 \frac{x_k}{L} \left( 1 - \frac{x_k}{L} \right) - \sin^2(\pi x_k/L) \right] \right\} \tag{8}$$

Moment krytyczny zwichrzenia otrzymany z rozwiązania równania kwadratowego (5) obliczamy ze wzoru (9) :

$$M_{cr} = C_1 N_{cr,z} [C_{2z} + C_3 \beta_z + \sqrt{D + (C_{2z} + C_3 \beta_z)^2}] \tag{9}$$

gdzie:

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{a_1}}, \quad C_{2z} = C_1 \frac{a_{2z}}{2}, \quad C_3 = C_1 \frac{a_3}{2} \tag{10abc}$$

W przypadku dowolnego rozkładu momentu zginającego, współczynnik  $C_1$  możemy oszacować na podstawie wartości bezwzględnych momentów zginających:

$$C_1 = \frac{12,5 M_0}{2,5 M_0 + 3 M_2 + 4 M_3 + 3 M_4} \quad \text{lecz } C_1 \leq 2,27 \tag{11}$$

gdzie:  $M_0 = \max |M_y(x)|$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  and  $M_4$  – momenty zginające w  $1/4$ ,  $1/2$  oraz  $3/4$  rozpiętości belki (Rys.2b).

**5. Przykład liczbowy**

Rozpatrzmy dwuteownik o przekroju monosymetrycznym (Rys. 1). Przyjmijmy za Żmudą [4] (wymiarzy w mm):  $b_2=400$ ,  $t_2=30$ ,  $b_1=300$ ,  $t_1=30$ ,  $h_0=470$ ,  $t_w=15$ ,  $h_2=209$ ,  $h_1=261$ . Podstawiając:  $A_2=120 \text{ cm}^2$ ;  $I_{z2}=16000 \text{ cm}^4$ ;  $A_1=90 \text{ cm}^2$ ,  $I_{z1}=6750 \text{ cm}^4$ ,  $I_y=124870 \text{ cm}^4$  do wzorów (3,4abc) otrzymujemy:  $z_S=6,955 \text{ cm}$ ,  $\beta_z=-8,679 \text{ cm}$ ,  $I_w=10487 \cdot 10^3 \text{ cm}^6$ ,  $I_T=679,5 \text{ cm}^4$  ( $I_z=22762 \text{ cm}^4$ ). Na podstawie wzorów (6ab), dla belki o rozpiętości  $L=7,5 \text{ m}$  otrzymujemy:  $N_{cr,z}=8387 \text{ kN}$ ,  $D=1117 \text{ cm}^2$ . Podstawiając (w kNm):  $M_0=250$ ;  $M_2=144,3$ ;  $M_3=200,8$ ;  $M_4=19,3$  do wzoru (11) otrzymujemy:

$$C_1 = \frac{12,5 \cdot 250}{2,5 \cdot 250 + 3 \cdot 144,3 + 4 \cdot 200,8 + 3 \cdot 19,3} = 1,628 \tag{12}$$

Podstawiając (w kN i m)  $M_0=250$ ,  $q_z=-25$ ,  $Q_{z1}=-80$ ,  $x_1=3,75$  oraz  $M_R=250$  do wzoru (8) obliczamy  $a_3$ :

$$a_3 = \frac{250}{250} + \frac{7,5}{250 \cdot \pi^2} \left\{ (-25) \cdot 7,5 \frac{\pi^2 - 3}{6} + (-80) \cdot \left[ \pi^2 \frac{3,75}{7,5} \left( 1 - \frac{3,75}{7,5} \right) - \sin^2 \left( \frac{3,75\pi}{7,5} \right) \right] \right\} = -0,009 \tag{13}$$

Do wzoru (7b) podstawiamy:  $M_0=250$ ,  $q_z=-25$ ,  $Q_{z1}=-80$ ,  $x_1=3,75$  (w kN i m). W przypadku obciążenia pokazanego na

where:

In equation (7a)  $a_1$  coefficient describes the influence of distribution of bending moment along the length of an element. Coefficient  $a_2$  denotes the placement of the lateral load according to equations (7b):

In case of monosymmetric cross sections the coefficient  $a_3$  is additionally determined using equation (8)

Derived from the solution of quadratic equation (5) the lateral buckling moment is given by (9):

where:

In case of an arbitrary distribution of the buckling moment, the  $C_1$  coefficient can be estimated, based on the absolute values of bending moments:

where:  $M_0$  – the higher bending moment,  $M_2$ ,  $M_3$  and  $M_4$  – bending moments values at  $x=L/4$ ,  $L/2$  and  $3L/4$  (Fig. 2b):

**5. Numerical example**

Let's consider the I-shaped beam with its monosymmetric cross section (Fig. 1). Let's take after Żmuda [4] (dimensions in mm):  $b_2=400$ ,  $t_2=30$ ,  $b_1=300$ ,  $t_1=30$ ,  $h_0=470$ ,  $t_w=15$ ,  $h_2=209$ ,  $h_1=261$ . Substituting:  $A_2=120 \text{ cm}^2$ ;  $I_{z2}=16000 \text{ cm}^4$ ;  $A_1=90 \text{ cm}^2$ ,  $I_{z1}=6750 \text{ cm}^4$ ,  $I_y=124870 \text{ cm}^4$  in the equation (3,4abc) we'll get:  $z_S=6,955 \text{ cm}$ ,  $\beta_z=-8,679 \text{ cm}$ ,  $I_w=10487 \cdot 10^3 \text{ cm}^6$ ,  $I_T=679,5 \text{ cm}^4$  ( $I_z=22762 \text{ cm}^4$ ). From equations (6ab) for the beam of  $L=7,5 \text{ m}$  span we'll obtain:  $N_{cr,z}=8387 \text{ kN}$ ,  $D=1117 \text{ cm}^2$ . Substituting (in kNm):  $M_0=250$ ;  $M_2=144,3$ ;  $M_3=200,8$ ;  $M_4=19,3$  into equation (11), we'll receive:

Substituting (in kNm and m)  $M_0=250$ ,  $q_z=-25$ ,  $Q_{z1}=-80$ ,  $x_1=3,75$  and  $M_R=250$  into equation (8) we calculate  $a_3$ :

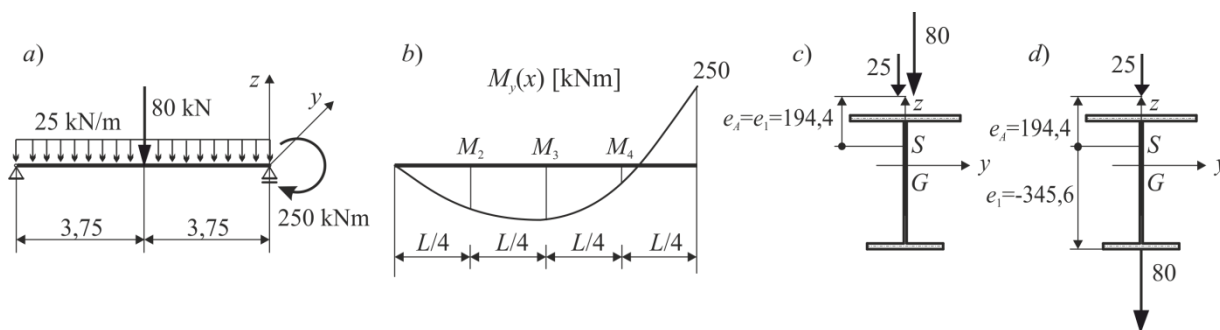
In the equation (7b) we'll substitute:  $M_0=250$ ,  $q_z=-25$ ,  $Q_{z1}=-80$ ,  $x_1=3,75$  (in kN and m). In case of distributed and

rys. 2c ( $e_A = e_1 = 19,44$  cm) ze wzoru (7b) otrzymujemy  $a_{2z} = -20,53$  cm, natomiast dla obciążenia pokazanego na rys. 2d ( $e_A = 19,44$  cm,  $e_1 = -34,56$  cm)  $a_{2z} = 5,70$  cm.

Następnie wyznaczamy dla obu typów obciążenia współczynnik  $C_{2z}$  ze wzoru (10b) i  $C_3$  ze wzoru (10c).

W tabeli 1 porównano momenty krytyczne zwichrzenia otrzymane na podstawie wzoru (9) z momentami krytycznymi wyznaczonymi za pomocą programu LTBeam [1]. W obu przypadkach błąd oszacowania był poniżej 1%. Więcej przykładów przedstawiono w pracy [6]. Wynika z nich, że przedstawiona metoda prowadzi do wystarczająco dokładnego oszacowania momentu krytycznego zwichrzenia.

concentrated load shown at Fig. 2c ( $e_A = e_1 = 19,44$  cm) using equation (7b) we'll get  $a_{2z} = -20,53$  cm. For the load shown in Fig. 2d ( $e_A = 19,44$  cm,  $e_1 = -34,56$  cm)  $a_{2z} = 5,70$  cm. Next, for both types of loads, we'll calculate the coefficient  $C_{2z}$  from equation (10b) and  $C_3$  from equation (10c), respectively. The comparison of lateral buckling moments obtained with equation (9) and LTBeam [1] programme is presented at the Table 1. In both cases the estimation error is less 1%. More examples can be found in [6]. In conclusion we may state, that the proposed method, described above, give estimation of lateral buckling moment with accuracy sufficient for design purposes.



Rys. 2. Dane do przykładu liczbowego a) schemat statyczny, b) wykres momentów zginających, c) pierwszy przypadek obciążenia, d) drugi przypadek obciążenia.

Fig. 2. Data for the numerical example a) static scheme, b) graph of the bending moments, c) the first case of the applied load, d) the second case of the applied load.

Tabela 1. Moment krytyczny zwichrzenia w zależności od miejsca przyłożenia obciążenia poprzecznego.

Table 1. Comparison of the lateral buckling moment as function of placement of the lateral load

Lp	Schemat statyczny	$C_1$	$C_{2z}$ [cm]	$C_3$	$M_{cr}$ [1]	$M_{cr}$ [kNm] / błąd %
1)	Obc. wg rys. 2c $e_A=e_1=194,4$ mm	1,628	-16,71	-0,007	2835,1	2824,9 /-0,4
2)	Obc. wg rys. 2d $e_A=194,4$ mm, $e_1=-345,6$ mm	1,628	4,640	-0,007	5212,0	5250,1 /0,7

Literatura • References

[1] Galéa Y., (2003), *Moment critique de déversement élastique de poutre fléchies –Présentation du logiciel LTBEAM*. Revue Construction Métallique. CTICM, Vol. 2, 2003.

[2] Mohri F., Brouki A., Roth JC., (2003), *Theoretical and numerical stability analyses of unrestrained, mono symmetric thin-walled beams*, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 59, 2003, pp. 63–90.

[3] Trahair N.S., Bradford M.A., Nethercot DA., Gardner L., (2008), *The behaviour and design of steel structures to EC3*. Furth edition, Taylor & Francis, London and New York.

[4] Żmuda J., (2013), *Konstrukcje wsporcze dźwignic*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

[5] Bijak R., (2011), *Moment krytyczny zwichrzenia niestężonych bisymetrycznych belek dwuteowych podpartych widelkowo*. ICMS2011 Conference, Wrocław.

[6] Bijak R., (2014), *Zwichrzenie niestężonych monosymetrycznych belek dwuteowych podpartych widelkowo*. Submitted to Inżynieria i Budownictwo.