

Niezawodność belki stalowej projektowanej według EN 1990 przy różnych regułach kombinacji obciążeń

Reliability of steel beam designed according to EN 1990 with various load combination rules

Mariusz Maślak¹*

¹Katedra Konstrukcji Metalowych,
Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska
ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków
e-mail: mmaslak@pk.edu.pl

Streszczenie

W pracy przedstawiono metodykę szacowania poziomu bezpieczeństwa belki stalowej projektowanej zgodnie z wymogami normy EN 1990. Wykazano, że poziom ten zależy nie tylko od przyjętej reguły kombinacji obciążeń ale także od stopnia udziału obciążeń zmiennych w globalnym efekcie oddziaływań. W analizie wykorzystano podejście w pełni probabilistyczne z globalnym wskaźnikiem niezawodności β jako obiektywną miarą oceny.

Abstract

The evaluation methodology of the safety level related to the steel beam being designed according to the recommendations given in the standard EN 1990 is presented and discussed in detail. It is shown that such level depends not only on the load combination rule adopted to the analysis but also on the ratio quantified a variable load influence in the total action effect value. In the analysis the probability-based approach is applied with the reliability index β as the objective safety measure.

Słowa kluczowe: belka stalowa, poziom bezpieczeństwa, wskaźnik niezawodności, kombinacje obciążeń
Keywords: steel beam, safety level, reliability index, load combinations

1. Wprowadzenie

Celem niniejszych rozważań jest weryfikacja klasycznej metodyki analizy rekomendowanej w przepisach normy EN 1990 [1] do stosowania w podstawowych sytuacjach projektowych. Chodzi o to, aby sprawdzić czy specyfikacja warunku granicznego określanego w krytycznym przekroju poprzecznym badanego elementu konstrukcyjnego na poziomie równości wartości obliczeniowych odpowiednio miarodajnego efektu kombinacji oddziaływań zewnętrznych przyłożonych do tego elementu E i towarzyszącej temu efektowi nośności R , czyli $E_d = R_d$, prowadzi do uzyskania odpowiedniego, możliwego do zaakceptowania, poziomu bezpieczeństwa. Zakłada się przy tym, że miarą tego poziomu jest globalny wskaźnik niezawodności β a poszczególne wartości obliczeniowe, odniesione zarówno do obciążeń uwzględnianych w rozpatrywanej kombinacji jak i do samej nośności, ustala się przy użyciu częściowych współczynników bezpieczeństwa podanych w przedmiotowej normie. Dla prostoty wywodu i czytelności interpretacji do analizy wybrano stalową belkę swobodnie podpartą o rozpiętości L , obciążoną równomiernie rozłożonym obciążeniem stałym o wartości charakterystycznej G_k , oraz dwoma rodzajami obciążeń zmiennych, również równomiernie rozłożonych, z których pierwsze jest dominujące o wartości charakterystycznej Q_k , drugie natomiast interpretuje się jako towarzyszące, z wartością charakterystyczną równą W_k (można przyjąć że jest to obciążenie wiatrem). A zatem, na podstawie [1], zachodzi $\gamma_G = 1,35$ oraz $\gamma_Q = \gamma_W = 1,5$. Z drugiej strony natomiast mamy $\gamma_M = 1,0$.

1. Introduction

The aim of the presented study is to verify the classical calculation methodology recommended by the standard EN 1990 [1] for application in case of the analysis of permanent design situations. The point is to check whether the specification of limit state condition determined for critical cross-section of structural member by the equality between the design values of the reliable action effect E , associated with the suitable combination of all external loads applied to the structure, and of the section resistance R , being compared with such effect, i.e. $E_d = R_d$, leads to the obtaining of the sufficient safety level, acceptable for the assumed safety requirements. It is accepted that the global reliability index β is the objective measure of this level and all design values, related both to the particular loads considered in examined combination and to the conclusive section resistance, are calculated by means of the use of partial safety factors with values given in the quoted standard. For simplicity of disquisition and for clarity of interpretations only the simply supported steel beam is chosen for detailed analysis, with the span L . Such beam is loaded by the self-weight load, with characteristic value G_k , as well as by two kinds of imposed loads, from which the first is always dominant, with characteristic value Q_k , whereas the second is interpreted as accompanying, with characteristic value W_k (it can be treated as typical wind load). All external loads applied to the beam are uniformly distributed. As a result of such assumptions, on the base of [1], it occurs: $\gamma_G = 1,35$ and $\gamma_Q = \gamma_W = 1,5$. On the other side one has $\gamma_M = 1,0$.

*Praca została wykonana w ramach grantu N N506 243938 finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego.
This paper was elaborated with the financial support of the project N N506 243938 granted by Polish Ministry of Science and Higher Education.

2. Porównywane reguły kombinacji obciążeń

W analizie porównuje się trzy podstawowe reguły kombinacyjne, zaczerpnięte z przepisów [1] i oznaczone kolejno literami A, B i C. Miarodajnym efektem działania jest moment zginający. Niech regułą A stanowi formuła:

$$E_d^{(A)} = \frac{L^2}{8} (\gamma_G G_k + \gamma_Q Q_k + \gamma_W \psi_W W_k) \tag{1}$$

regułą B natomiast układ dwóch równań, z których miarodajne jest równanie dające większy efekt:

$$E_d^{(B1)} = \frac{L^2}{8} (\gamma_G G_k + \gamma_Q \psi_Q Q_k + \gamma_W \psi_W W_k) \tag{2}$$

$$E_d^{(B2)} = \frac{L^2}{8} (\xi \gamma_G G_k + \gamma_Q Q_k + \gamma_W \psi_W W_k) \tag{3}$$

Regułą C definiuje analogiczna kombinacja równań (2) i (3), przy czym to pierwsze zapisano teraz w postaci uwzględniającej działanie samego tylko obciążenia stałego, a więc:

$$E_d^{(C1)} = \frac{L^2}{8} (\gamma_G G_k) \tag{4}$$

$$E_d^{(C2)} = \frac{L^2}{8} (\xi \gamma_G G_k + \gamma_Q Q_k + \gamma_W \psi_W W_k) \tag{5}$$

Na mocy [1] przyjęto, że $\xi = 0,85$ oraz $\psi_Q = 0,7$ i $\psi_W = 0,6$.

W celu szczegółowej analizy zależności uzyskanego poziomu bezpieczeństwa od stopnia udziału obciążeń zmiennych w globalnym efekcie oddziaływań wprowadza się następujące współczynniki bezwymiarowe [2]:

$$\chi = \frac{Q_k + W_k}{G_k + Q_k + W_k} \quad \text{oraz (and)} \quad k = \frac{W_k}{Q_k} \tag{6}$$

Pozwalają one, przy znanej wartości $E_d = R_d = R_k / \gamma_M$, na wyrażenie wartości charakterystycznych poszczególnych obciążeń przyłożonych do rozpatrywanej belki w postaci kolejno następujących po sobie formuł [2]:

$$G_k = \frac{E_d}{[\xi] \gamma_G + \frac{(\psi_Q \gamma_Q + k [\psi_W \gamma_W]) \chi}{(1+k)(1-\chi)}} \tag{7}$$

$$Q_k = \frac{\chi G_k}{(1+k)(1-\chi)} \quad \text{oraz (and)} \quad W_k = k Q_k \tag{8}$$

w których wielkości podane w nawiasach kwadratowych, w zależności od rozpatrywanej reguły kombinacyjnej, mogą przyjmować wartości wyspecyfikowane w [1] bądź być równe zero. W pracy [2] podaje się ponadto wyrażenia na graniczne wartości χ_{lim} decydujące o stosowalności poszczególnych formuł kombinacyjnych. W takim ujęciu formuła A (równanie (1)) ma zastosowanie w pełnym zakresie $0 \leq \chi \leq 1$. Jeśli do analizy wybrać regułą B to równanie (2) będzie miarodajne gdy $0 \leq \chi \leq \chi_{lim,B}$ (w zakresie $\chi_{lim,B} \leq \chi \leq 1$ miarodajnym jest równanie (3)). Analogicznie dla reguły C równanie (4) znajduje zastosowanie w przypadku gdy $0 \leq \chi \leq \chi_{lim,C}$, jeśli natomiast zachodzi $\chi_{lim,C} \leq \chi \leq 1$ to stosuje się równanie (5). Szczegółowe formuły definiujące granice χ_{lim} podano poniżej:

2. Load combination rules being compared in the study

Three basic load combination rules, denoted as A, B and C, are examined in the analysis. All of those are defined in the standard [1]. The bending moment is a reliable action effect. Let the rule A be determined by the following formula:

whereas the rule B by the system of two equations, in which the reliable is that one leading to the greater action effect:

The rule C is the analogous combination of Eq. (2) and Eq. (3) but now the first of those is specified for permanent load only, which gives:

It is accepted that $\xi = 0,85$ as well as $\psi_Q = 0,7$ and $\psi_W = 0,6$.

To study in detail the relation between the obtained safety level and the ratio quantified a variable load influence in the total action effect value the following dimensionless parameters are introduced to the analysis [2]:

They allow, if the value of $E_d = R_d = R_k / \gamma_M$ is known in advance, to express the characteristic values specified for all particular load types applied to the beam by the succeeding formulae [2]:

in which the quantities given in square brackets can either be quantified exactly according to the specification recommended in [1] or be taken as a zero value, dependently on the adopted load combination rule. Moreover, in paper [2] one can find the limit values χ_{lim} being decisive as far as the applicability of particular combination formula is concerned. In such approach the rule A (see Eq. (1)) can be used in the whole range $0 \leq \chi \leq 1$. If the rule B is chosen to the analysis then the applicability of Eq. (2) is limited by the inequality $0 \leq \chi \leq \chi_{lim,B}$ (obviously if the limitation $\chi_{lim,B} \leq \chi \leq 1$ is conclusive then Eq. (3) becomes reliable). Analogously, in relation to the rule C, Eq. (4) can be applied only in case when $0 \leq \chi \leq \chi_{lim,C}$, whereas Eq. (5) if $\chi_{lim,C} \leq \chi \leq 1$ occurs. The detailed formulae quantifying the limits χ_{lim} are given below:

$$\chi_{\text{lim},B} = \frac{\gamma_G(1-\xi)(1+k)}{\gamma_G(1-\xi)(1+k) + \gamma_Q(a-\psi_Q) + \gamma_W k(b-\psi_W)} \quad (9)$$

$$\chi_{\text{lim},C} = \frac{\gamma_G(1-\xi)(1+k)}{\gamma_G(1-\xi)(1+k) + \gamma_Q a + \gamma_W k b} \quad (10)$$

gdzie:

where:

$$a = 1 \text{ jeśli (if) } k \leq \frac{1-\psi_Q}{1-\psi_W} \text{ i (and) } a = \psi_Q \text{ jeśli (if) } k > \frac{1-\psi_Q}{1-\psi_W} \quad (11)$$

$$b = \psi_W \text{ jeśli (if) } k \leq \frac{1-\psi_Q}{1-\psi_W} \text{ i (and) } b = 1 \text{ jeśli (if) } k > \frac{1-\psi_Q}{1-\psi_W} \quad (12)$$

3. Model probabilistyczny i analiza niezawodności

Warunek stanu granicznego określa się dla losowych wartości obciążenia i nośności. W przypadku analizowanym w pracy ma on postać:

$$Z = K_R R - K_E (G + Q + W) = 0 \quad (13)$$

przy czym losowe współczynniki K_R i K_E są miarą niepewności modelu, odniesionej odpowiednio do oszacowania nośności i efektu rozpatrywanej kombinacji obciążeń. Stąd, przyjmując gaussowskie wartości średnie na poziomie $\overline{K_R} = \overline{K_E} = 1,0$ oraz odpowiednie odchylenia standardowe jako $\sigma_{KR} \neq 0$ i $\sigma_{KE} \neq 0$, wyznacza się globalny wskaźnik niezawodności:

$$\beta = \frac{\overline{R} - (\overline{G} + \overline{Q} + \overline{W})}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_{KR}^2 + \sigma_G^2 + \sigma_Q^2 + \sigma_W^2 + \sigma_{KE}^2}} \quad (14)$$

Poszczególne zmienne losowe modelowane są zwykle przez różne rozkłady prawdopodobieństwa, dlatego sprawą fundamentalną jest sprowadzenie parametrów opisujących te rozkłady do odpowiadających im parametrów rozkładu normalnego, to jest do wartości średniej $\overline{X} = m_X$ i odchylenia standardowego σ_X . W niniejszych rozważaniach do tego celu posłużono się metodą momentów probabilistycznych.

Przyjmijmy, że rozpatrywaną belkę wykonano ze stali S235. Losowa granica plastyczności materiału opisywana jest rozkładem log-normalnym, a zatem mediana $\tilde{f}_y = 235 \text{ MPa}$. Wartość tę bez większego błędu można potraktować jako średnią rozkładu normalnego m_R . Biorąc pod uwagę, że również logarytmiczne współczynniki zmienności nie różnią się znacząco od analogicznych współczynników określonych dla rozkładu Gaussa i uwzględniając reprezentatywne badania statystyczne można oszacować, że $m_R = R_k + 2\sigma_R$, przy czym $\sigma_R = m_R v_R = 235 \cdot 0,08 = 18,8 \text{ MPa}$. Ponadto zachodzi $\sigma_{KR} = m_{KR} v_{KR} = 1 \cdot 0,06 = 0,06 \text{ MPa}$.

Ciążar własny modeluje się rozkładem normalnym dla którego $\overline{G} = m_G = G_k$. Ponadto, na mocy zaleceń [3], przyjęto $v_G = 0,06$, co daje $\sigma_G = 0,06 G_k$.

Obciążenie zmienne dominujące jest obciążeniem użytkowym o rozkładzie Gumbela. Niech będzie to obciążenie typowe dla pomieszczenia biurowego, dla którego przy 5-letnim okresie odniesienia $\overline{Q_5} = 0,5 \text{ kN/m}^2$ oraz $\sigma_{Q_5} = 0,67 \text{ kN/m}^2$

3. Probabilistic model and reliability analysis

The limit state condition is specified for random values both of a section resistance and of the external loads applied to the beam. In case considered in the example it has a form:

in which the random coefficients K_R and K_E are the measure of model uncertainty, related to the resistance evaluation and to the assessment of considered load combination effect. If they are modelled by the normal probability distribution then their mean values $\overline{K_R} = \overline{K_E} = 1,0$ as well as the suitable standard deviations $\sigma_{KR} \neq 0$ and $\sigma_{KE} \neq 0$. Consequently, the global reliability index is calculated by:

Particular random variables are usually described by various probability distributions. For this reason the recalculation of basic parameters of such distributions to suitable ones, being characteristic for normal distribution is fundamental, especially in relation to the mean value $\overline{X} = m_X$ as well as to the standard deviation σ_X . In the proposed approach the application of classical method of moments is recommended.

Let us assume that the considered beam is made of the S235 steel grade. It is commonly known that the random steel yield point is described by log-normal probability distribution, then the median value $\tilde{f}_y = 235 \text{ MPa}$. This value can be interpreted with sufficient precision to be equal to the Gaussian mean value m_R . Basing of the fact that also the log-normal coefficients of variation are quantitatively similar to the normal ones and considering the representative statistic estimations it is well justified to assess that $m_R = R_k + 2\sigma_R$, where $\sigma_R = m_R v_R = 235 \cdot 0,08 = 18,8 \text{ MPa}$. Moreover, it is true that $\sigma_{KR} = m_{KR} v_{KR} = 1 \cdot 0,06 = 0,06 \text{ MPa}$.

The self-weight is characterised by normal probability distribution for which $\overline{G} = m_G = G_k$. Furthermore, it is assumed that $v_G = 0,06$ [3], which gives $\sigma_G = 0,06 G_k$.

The imposed load is dominant variable action with Gumbel probability distribution. Let it be the action typical for the office use, for which $\overline{Q_5} = 0,5 \text{ kN/m}^2$ and $\sigma_{Q_5} = 0,67 \text{ kN/m}^2$ [3]. Such values are specified for 5-year reference period so their

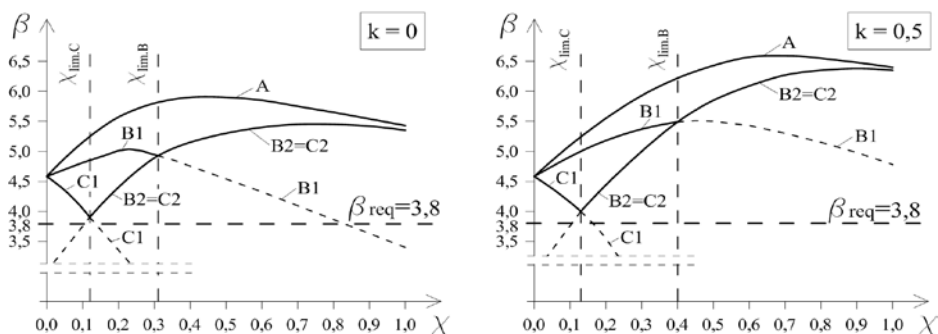
[3]. Po przeliczeniu tych wartości na okres 50-letni otrzymuje się $\overline{Q}_{50} = \overline{Q}_5 + 0,78\sigma_{Q5} \ln 10 = 1,70 \text{ kN/m}^2$ i $\sigma_{Q50} = \sigma_{Q5}$. Z drugiej strony zachodzi $Q_k = \tilde{Q}_{50} - u_Q \ln(-\ln(0,98))$ gdzie $\tilde{Q}_{50} = \overline{Q}_{50} - 0,45\sigma_{Q50}$ oraz $u_Q = 0,78\sigma_{Q50}$. W efekcie $Q_k = 3,43 \text{ kN/m}^2$, co daje $\overline{Q}_{50} \cong 0,5Q_k$ i $\sigma_{Q50} = 0,195Q_k$.

Obciążenie wiatrem, modelowane również rozkładem Gumbela, w analizowanym przykładzie nie jest obciążeniem dominującym. Z tego względu, stosując zasadę Turkstry, zamiast maksimów 50-letnich uwzględnia się jedynie mniejsze maksima 1-roczone. Niech średnia prędkość $\bar{v}_1 = 25 \text{ m/s}$ natomiast odchylenie standardowe $\sigma_{v1} = 5 \text{ m/s}$. Przeliczenie tych wartości na gumbelowskie maksimum 50-letnie daje $\tilde{v}_{50} = 38,01 \text{ m/s}$ oraz $u_{v50} = 3,90 \text{ m/s}$. Stąd wartość charakterystyczna $v_{k50} = 53,22 \text{ m/s}$. Pamiętajając, że dla obciążenia wiatrem zachodzi $(\overline{W}_1/W_{k50}) = (\bar{v}_1/v_{k50})^2$ otrzymuje się $\overline{W}_1 = \left(\frac{25}{53,22}\right)^2 W_{k50} = 0,22W_{k50}$. Geometryczne sumowanie pozwala na wyznaczenie odchylenia standardowego dając $\frac{\sqrt{2}\sigma_{v1}}{v_{k50}} = \frac{\sigma_{w1}}{W_{k50}}$, co prowadzi do $\sigma_{W1} = 0,133W_{k50}$.

W odniesieniu do wskaźnika K_E , po uwzględnieniu zaleceń [3], przyjęto $\sigma_{KE} = 0,10 \text{ kN/m}^2$.

4. Wnioski

Otrzymane relacje $\beta = \beta(\chi)$ pokazano na rys. 1. Jak widać w przypadku każdej z rozpatrywanych reguł kombinacyjnych wynikowy zapas bezpieczeństwa jest wystarczający. Oczywiście najbardziej zachowawcza spośród porównywanych jest reguła A, gdyż wtedy częściowe współczynniki bezpieczeństwa są stosowane w sposób najbardziej ostrożny.



Rys. 1. Relacje $\beta = \beta(\chi)$ otrzymane dla poszczególnych reguł kombinacyjnych rozpatrywanych w przykładzie.
 Fig. 2. Relations $\beta = \beta(\chi)$ obtained for particular load combination rules examined in the example.

Literatura • References

[1] PN-EN 1990, Eurokod - Podstawy projektowania konstrukcji.
 [2] Gulvanessian H., Holicky M., (2002), Reliability based calibration of Eurocodes considering a steel member, JCSS Workshop on Reliability Based Code Calibration, Zurich, Switzerland, March 21-22, 2002.
 [3] JCSS (2001), Probabilistic Model Code, Joint Committee of Structural Safety, ISBN 978-3-909386-79-6, (www.jcss.byg.dtu.dk).

recalculation for 50-year period is necessary giving $\overline{Q}_{50} = \overline{Q}_5 + 0,78\sigma_{Q5} \ln 10 = 1,70 \text{ kN/m}^2$ and $\sigma_{Q50} = \sigma_{Q5}$. On the other hand $Q_k = \tilde{Q}_{50} - u_Q \ln(-\ln(0,98))$ occurs, where $\tilde{Q}_{50} = \overline{Q}_{50} - 0,45\sigma_{Q50}$ and $u_Q = 0,78\sigma_{Q50}$. As a result $Q_k = 3,43 \text{ kN/m}^2$, giving $\overline{Q}_{50} \cong 0,5Q_k$ and $\sigma_{Q50} = 0,195Q_k$.

The wind action, modelled also by Gumbel distribution, is non-dominant in the presented example. Therefore, according to the Turkstra rule, only the annual maxima are considered in place of the larger 50-year values. Let the annual mean wind velocity be equal to $\bar{v}_1 = 25 \text{ m/s}$, whereas the suitable standard deviation to $\sigma_{v1} = 5 \text{ m/s}$. Recalculation of such values to obtain the 50-year maximum with Gumbel parameters gives $\tilde{v}_{50} = 38,01 \text{ m/s}$ and $u_{v50} = 3,90 \text{ m/s}$. As a result the characteristic value $v_{k50} = 53,22 \text{ m/s}$. Consequently, because of the fact that for the wind action $(\overline{W}_1/W_{k50}) = (\bar{v}_1/v_{k50})^2$ occurs, it is true that $\overline{W}_1 = \left(\frac{25}{53,22}\right)^2 W_{k50} = 0,22W_{k50}$. Furthermore, by geometrical summing one can obtain $\frac{\sqrt{2}\sigma_{v1}}{v_{k50}} = \frac{\sigma_{w1}}{W_{k50}}$, which leads to the evaluation $\sigma_{W1} = 0,133W_{k50}$.

Regarding the coefficient K_E it is assumed that $\sigma_{KE} = 0,10 \text{ kN/m}^2$, according to [3].

5. Conclusions

Relations $\beta = \beta(\chi)$, obtained from the application of the recommended calculation algorithm, are presented in Fig. 1. As one can see the conclusive safety margin is always sufficient, for all combination rules considered in the example. Obviously, the rule A is most conservative because the partial safety factors are then adopted and arranged most carefully.