

Kalibrowanie współczynników częściowych dla wymaganego wskaźnika niezawodności Calibration of partial factors for the required reliability index

Andrzej Machowski¹, Paweł Żwirek¹

¹Katedra Konstrukcji Metalowych,
Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska
ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków
e-mail: konsmet@pk.edu.pl

¹Department of Metal Structures
Faculty of Civil Engineering, Cracow University of Technology
ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków
e-mail: pzwi@pk.edu.pl

Streszczenie

Przedstawiono analizę zależności pomiędzy wskaźnikiem niezawodności a częściowymi współczynnikami bezpieczeństwa oraz ocenę poprawności tradycyjnych wartości współczynników częściowych przyjętych w Eurokodzie [3].

Abstract

A relationship between the reliability index and the partial safety factors has been analysed, and a correctness of traditional values of partial safety factors adopted in the Eurocode [3] has been assessed.

Słowa kluczowe: konstrukcje metalowe, wskaźnik niezawodności, częściowe współczynniki bezpieczeństwa
Keywords: steel structures, reliability index, partial safety factors

1. Zależność współczynników częściowych od wskaźnika niezawodności

Zadanie kalibrowania częściowych współczynników bezpieczeństwa γ_R i γ_F , z zastosowaniem metody probabilistycznej poziomu 2 ([1], [2], [3]), w przypadku podstawowym funkcji stanów - z rozseparowanymi i wzajemnie losowo niezależnymi: losową nośnością \underline{R} i odpowiednim losowym efektem obciążeń (oddziaływań) \underline{E} - w postaci $\underline{g} = \underline{R} - \underline{E}$ (por. wzór (C.2b) w [3]), daje się rozwiązać w postaci zamkniętej. Procedurę prowadzącą do wyznaczenia odpowiednich formuł dla zadanej (wymaganej) wartości granicznej (minimalnej) wskaźnika niezawodności $\beta = \beta_u$ przedstawiono na rys. 1. Przy przejściu z płaszczyzny zmiennych podstawowych EOR (rys. 1a) do płaszczyzny zmiennych standaryzowanych $\xi_E O \xi_R$ (rys. 1b) prosta graniczna g_x przechodzi w prostą g_ξ , której położenie jest jednoznacznie określone przez trzy parametry: centralny współczynnik bezpieczeństwa $\gamma_c = \bar{R} / \bar{E}$ (gdzie \bar{R} i \bar{E} - odpowiednie wartości średnie) oraz współczynniki zmienności $v_R = \mu_R / \bar{R}$ i $v_E = \mu_E / \bar{E}$ (gdzie: μ_R i μ_E - odpowiednie odchylenia standardowe).

Wartość wskaźnika niezawodności $\beta_u(\gamma_c, v_R, v_E)$ jako odległości prostej granicznej g_ξ od początku układu O_ξ (rys. 1b) jest jednoznacznie określona przez zależność (wynikającą z geometrii trójkąta $1O_\xi 2$)

$$\beta_u = \frac{\gamma_c - 1}{\sqrt{v_E^2 + (\gamma_c \cdot v_R)^2}}, \quad (1)$$

Punkt B (betha point) wg rys. 1b odpowiada, w przypadku standaryzowanego rozkładu normalnego (ξ_R, ξ_E) - czyli

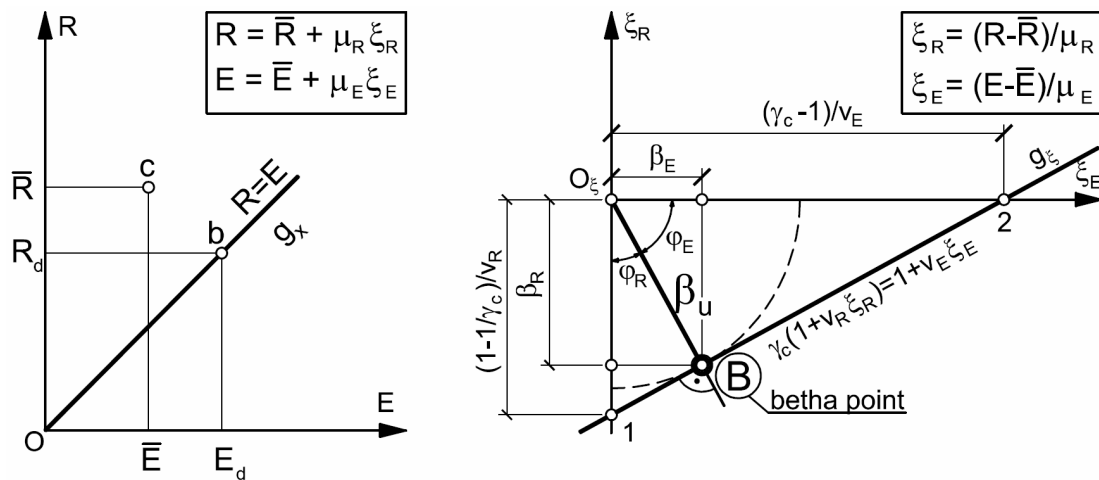
1. Dependency between the partial factors and the reliability index

The task of calibrating partial safety factors γ_R and γ_F , using a level 2 probabilistic method ([1], [2], [3]), in the case of the basic function of limit states - with separate and mutually independent: random resistance \underline{R} and corresponding random effect of loads (impacts) \underline{E} - in the form of $\underline{g} = \underline{R} - \underline{E}$ (cf. formula (C.2b) in [3]), can be solved in the closed form. A procedure leading to the determining of appropriate formulas for the assumed (required) limit (minimum) value of the reliability index $\beta = \beta_u$ has been shown in Fig. 1. During the transition from the plane of the basic variables EOR (Fig. 1a) to the plane of the standardized variables $\xi_E O \xi_R$ (Fig. 1b), the limit line g_x becomes the line g_ξ . The position of the line g_ξ is uniquely defined by three parameters: the central safety factor $\gamma_c = \bar{R} / \bar{E}$ (where \bar{R} and \bar{E} - the corresponding mean values) and the coefficients of variation $v_R = \mu_R / \bar{R}$ and $v_E = \mu_E / \bar{E}$ (where μ_R and μ_E - the corresponding standard deviations). The value of the reliability index $\beta_u(\gamma_c, v_R, v_E)$ as a distance of the limit line g_ξ from the origin of the coordinate system O_ξ (Fig. 1b) is uniquely determined by the relationship (resulting from the geometry of the triangle $1O_\xi 2$)

In the case of the standardized normal distribution (ξ_R, ξ_E), i.e. the cyclometric distribution, according to Fig. 1b, point B

rozkładu cyklotometrycznego, najbardziej prawdopodobnemu, czyli modalnemu stanowi granicznemu (por. [1], [2]).

(Betha point) corresponds to the most probable limit state, which is the modal limit state (cf. [1], [2]).



Rys. 1. Kalibrowanie współczynników częściowych γ_R i γ_E dla $g=R-E$.

Fig. 1. Calibration of partial factors γ and γ_E for $g=R-E$.

Centralne częściowe współczynniki bezpieczeństwa można zdefiniować następująco:

Central partial safety factors can be defined as follows:

$$\gamma_{RC} \stackrel{df}{=} R / R_d = 1 / (1 - \beta_R v_R) = 1 / (1 - \beta_u |\alpha_R| v_R), \quad \gamma_{EC} = 1 + \beta_E v_E = 1 + \beta_u |\alpha_E| v_E, \quad (2)$$

gdzie częściowe wskaźniki niezawodności β_R i β_E stanowią moduły współrzędnych punktu B (rys. 1b)

where the partial reliability indices β_R and β_E are the modules of the coordinates of point B (Fig. 1b)

$$\beta_R = -\xi_{RB} = \beta_u |\alpha_R|, \quad \beta_E = \xi_{EB} = \beta_u |\alpha_E|, \quad (3)$$

dla wyznaczonych z trójkąta $1O_\xi 2$ (rys. 1b) współczynników wrażliwości (współczynników kalibracji)

for the sensitivity factors (calibration factors) calculated from the triangle $1O_\xi 2$

$$|\alpha_R| = \cos \varphi_R = 1 / \sqrt{1 + (v_E / (\gamma_c v_R))^2}, \quad |\alpha_E| = \cos \varphi_E = 1 / \sqrt{1 + (\gamma_c v_R / v_E)^2}. \quad (4)$$

Obliczenia współczynników częściowych γ_{RC} i γ_{EC} dla wymaganej wartości wskaźnika niezawodności $\beta = \beta_u$ i kolejnych par wartości v_R i v_E należy rozpocząć od wyznaczenia wartości centralnego współczynnika bezpieczeństwa γ_c z przekształcenia wzoru (1)

Calculations of the partial factors γ_{RC} and γ_{EC} for the required value of the reliability index $\beta = \beta_u$ and successive pairs of values v_R and v_E should start with determining the value of the central safety factor γ_c from the transformation of the formula (1)

$$\gamma_c = \gamma_c(\beta_u, v_R, v_E) = (1 + \sqrt{1 - (1 - \beta_u^2 v_R^2)(1 - \beta_u^2 v_E^2)}) / (1 - \beta_u^2 v_R^2) \quad (5)$$

a następnie zastosować kolejno wzory: (4), (3) i (2).

and then apply the formulas as follows: (4), (3) and (2).

2. Porównanie wykalibrowanych współczynników częściowych z tradycyjnymi wartościami normowymi [3]

2. A comparison of calibrated partial factors with traditional standard values [3]

Znaczenie praktyczne dla normalizacji mają nie współczynniki centralne: γ_{RC} i γ_{EC} lecz współczynniki częściowe odniesione do wartości charakterystycznych R_k i E_k :

Partial factors related to the characteristic values of R_k and E_k and not central factors: γ_{RC} and γ_{EC} , are of practical significance for the standardization:

$$\gamma_R \stackrel{df}{=} R_k / R_d = (\bar{R} / R_d)(R_k / \bar{R}) = \gamma_{RC} R_k / \bar{R}, \quad \gamma_E \stackrel{df}{=} E_d / E_k = (E_d / \bar{E})(\bar{E} / E_k) = \gamma_{EC} \bar{E} / E_k. \quad (6)$$

Przyjmując dla wartości charakterystycznych R_k i E_k odpowiednio: dolny i górny kwantyl rozkładu normalnego na poziomie $\omega=5\%$ (por. [3]) otrzymujemy:

Assuming for the characteristic values of R_k and E_k , lower and upper quantile of the normal distribution (for $\omega=5\%$, see [3]), we obtain, respectively:

$$\gamma_R = \gamma_{RC}(1 - 1,64 v_R), \quad \gamma_E = \gamma_{EC} / (1 + 1,64 v_E). \quad (7)$$

Zakładając, że losowy efekt \underline{E} jest kombinacją liniową wzajemnie niezależnych działań (obciążeń) przyjęto w przybliżeniu asymptotyczny rozkład normalny prawdopodobieństwa \underline{E} .
 Obliczone dla $\beta_u=3,8$ (por. [3]) i różnych wartości v_R i v_E współczynniki γ_R i γ_E zamieszczono w tabeli 1.

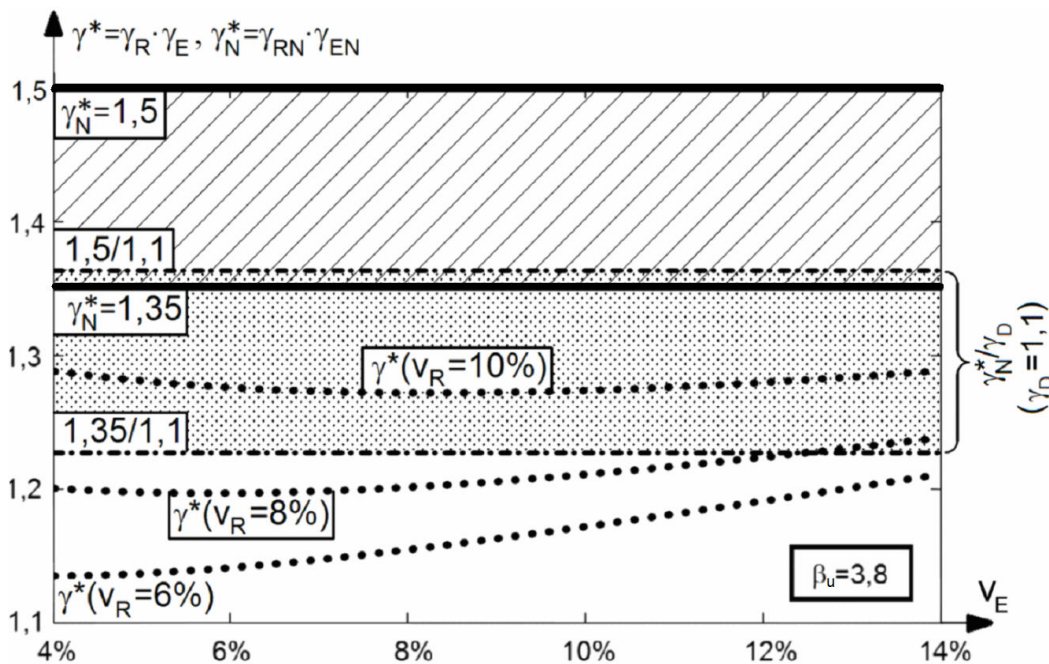
Assuming that the random effect \underline{E} is a linear combination of mutually independent impacts (loads), calculations assume approximately asymptotic normal probability distribution of \underline{E} .
 The factors γ_R and γ_E calculated for $\beta_u=3,8$ (see: [3]) and different values of v_R and v_E have been presented in Table 1.

Tabela 1. Wartości współczynników γ_R i γ_E wykalibrowanych dla $\beta_u=3,8$.
 Table 1. Values of the factors γ_R and γ_E calibrated for $\beta_u=3,8$.

$\beta_u=3,8$		v_E						
		4%	6%	8%	10%	12%	14%	
v_R	6%	γ_R	1,133	1,106	1,083	1,065	1,050	1,038
		γ_E	1,002	1,032	1,066	1,101	1,134	1,166
	8%	γ_R	1,220	1,194	1,168	1,144	1,124	1,107
		γ_E	0,984	1,003	1,029	1,058	1,089	1,119
	10%	γ_R	1,325	1,302	1,276	1,250	1,226	1,204
		γ_E	0,972	0,980	0,997	1,019	1,044	1,070

Warunki niezawodności $R_d=R_k/\gamma_R \geq E_d=E_k\gamma_E$ oraz $\beta \geq \beta_u$ są wzajemnie równoważne (por. także [1]) jeśli kalibrowanie γ_R i γ_E przeprowadzi się wg (2)÷(5), tj. na podstawie punktu "B" z rys. 1b. Porównanie ilościowe metody projektowania opartej na wykalibrowanych współczynnikach częściowych γ_R i γ_E oraz metody normowej [3], opartej na wartościach tradycyjnych $\gamma_{RN}=\gamma_m=1,0$ oraz $\gamma_{EN}=1,35\div 1,50$ można zatem przeprowadzić zestawiając ze sobą wartości globalnych współczynników bezpieczeństwa $\gamma^*=\gamma_R\gamma_E$ i $\gamma^*_N=\gamma_{RN}\gamma_{EN}$. Odpowiednie porównanie przeprowadzono na rysunku 2, uwzględniając także współczynnik błędów modelowania $\gamma_D=1,1$.

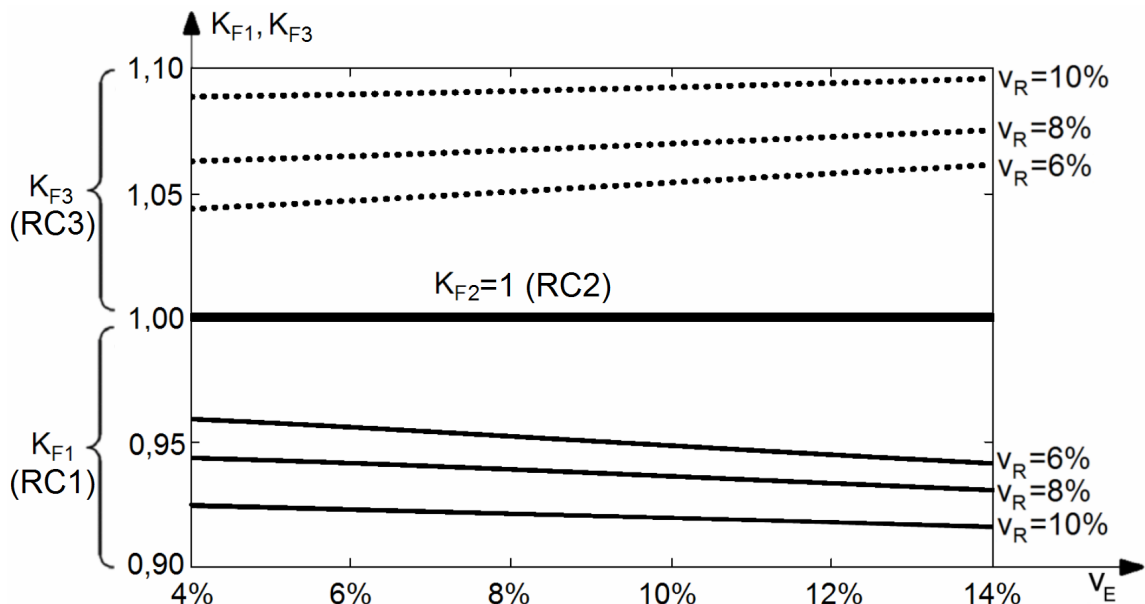
Conditions of reliability $R_d=R_k/\gamma_R \geq E_d=E_k\gamma_E$ and $\beta \geq \beta_u$ are mutually equivalent (see also [1]) if the calibration of γ_R and γ_E is carried out according to (2) ÷ (5), i.e. on the basis of the point "B" from Fig. 1b. Quantitative comparison of the design method based on the calibrated partial factors γ_R and γ_E and the normalization method [3], based on the traditional values $\gamma_{RN}=\gamma_m=1,0$ and $\gamma_{EN}=1,35\div 1,50$, can be then carried out comparing the values of the global safety factors $\gamma^*=\gamma_R\gamma_E$ and $\gamma^*_N=\gamma_{RN}\gamma_{EN}$. A relevant comparison has been carried out in Fig. 2, taking into account the modeling error coefficient $\gamma_D=1,1$.



Rys. 2. Porównanie wartości współczynników $\gamma^*=\gamma_R\gamma_E$ ze współczynnikami $\gamma^*_N=\gamma_{RN}\gamma_{EN}$ dla $\beta_u=3,8$.
 Fig. 2. A comparison of the values of the factors $\gamma^*=\gamma_R\gamma_E$ with coefficients $\gamma^*_N=\gamma_{RN}\gamma_{EN}$ for $\beta_u=3,8$.

Z porównania wyników obliczeń dla $\beta=3,3$ oraz $\beta=4,3$ (por [3]) otrzymano współczynniki korekcyjne $K_{F1}=\gamma^*_1/\gamma^*_2=0,916\div 0,959$ i $K_{F3}=\gamma^*_3/\gamma^*_2=1,044\div 1,096$ (por. rys. 3), gdzie indeksy: 1, 2 i 3 odpowiadają wartościom $\beta=3,3, 3,8, 4,3$.

A comparison of the results of calculations for $\beta=3,3$ and $\beta=4,3$ (cf. [3]) yielded correction factors $K_{F1}=\gamma^*_1/\gamma^*_2=0,916\div 0,959$ and $K_{F3}=\gamma^*_3/\gamma^*_2=1,044\div 1,096$ (see fig. 3), where the indices 1, 2 and 3 correspond to the values of $\beta=3,3, 3,8, 4,3$.



Rys. 3. Wykresy wartości współczynników K_{F1} i K_{F3} .
 Fig. 3. Diagrams of the values of the coefficients K_{F1} i K_{F3} .

3. Wnioski

- Wartości γ_R i γ_E z tabeli 1, wykalibrowane dla $\beta_u=3,8$, różnią się istotnie od wartości: $\gamma_{RN}=1$ i $\gamma_{EN}=1,35\div 1,50$ - wynikających z tradycyjnych zaleceń normowych [3].
- Z porównania wartości globalnych współczynników bezpieczeństwa γ^* i γ_N^* wg rys. 2 widać, że tradycyjne wartości współczynników częściowych są ostrożne - nawet jeśli dodatkowo uwzględnić współczynnik błędu modelu obliczeniowego $\gamma_D=1,1$.
- Wartości współczynników korygujących K_F dla klas RC1 i RC3 (por. [3]) wyznaczone jako ilorazy odpowiednich współczynników globalnych γ^* wykazują dobrą zgodność z zaleceniami normowymi [3].

Należy zauważyć, że zarówno przeprowadzona analiza, jak i koncepcje Eurokodu [3] opierają się na szeregu założeń upraszczających.

3. Conclusions

- The values of γ_R and γ_E in Table 1, calibrated for $\beta_u=3,8$, differ significantly from the values of: $\gamma_{RN}=1$ and $\gamma_{EN}=1,35\div 1,50$ - obtained from traditional standard recommendations [3].
- When comparing the values of the global safety factors γ^* and γ_N^* according to Fig. 2, it can be seen that the traditional values of the partial factors are cautious - even if the calculation model error coefficient $\gamma_D=1,1$ was taken into consideration.
- The values of the correction factors K_F for the classes RC1 and RC3 (see: [3]), calculated as quotients of the respective global factors γ^* , have good agreement with the standard recommendations [3].

It should be noted that, both the carried out analysis, as well as the concepts of the Eurocode [3] are based on a number of simplifying assumptions.

Literatura • References

[1] Gwóźdź M., Machowski A., (2011), *Wybrane badania i obliczenia konstrukcji metodami probabilistycznymi*, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków.
 [2] Murzewski J. (1989), *Niezawodność konstrukcji inżynierskich*, Arkady, Warszawa.
 [3] PN-EN 1990. Eurokod. Podstawy projektowania konstrukcji.