Miary niezawodności konstrukcji budowlanych
Reliability measures of building structures

Marian Gwóźdź

Katedra Konstrukcji Metalowych,
Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska
ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków
e-mail: margwozdz@interia.pl

Department of Metal Structures
Faculty of Civil Engineering, Technological University of Cracow
ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków
e-mail: margwozdz@interia.pl

Streszczenie

Projektowanie konstrukcji budowlanych według współczesnej generacji norm europejskich jest oparte na formacji wymiarowania metodą współczynników obciążenia i nośności. Jest to odmiana metody stanów granicznych, która różni się od podobnej formacji wprowadzonej w Polsce do norm krajowych w latach 1970. Podstawy merytoryczne i formalne tej metody są sformułowane w eurokodzie PN-EN 1990 oraz w europejskich normach wykonania konstrukcji. W referacie przeprowadzono analizę normowych miar niezawodności konstrukcji budowlanych w szerszym kontekście rozwiązań teorii niezawodności według poziomów obliczeń probabilistycznych [2], [5], [7]. Wykazano znaczący wpływ metody modelowania ustrojów mechanicznych na ilościową ocenę miar niezawodności konstrukcji budowlanych [4].

Abstract

Design of building structures according to the current generation of eurocodes is based upon the formation of dimensioning on load and bearing capacity coefficient method. This is a variant of limit state method, different from the similar formation introduced into Polish national building codes in the seventies of XX century. Substantive and formal basics of this method are formulated in eurocode PN-EN 1990 and European structural manufacturing standards. Analysis of reliability measures for building structures according to the code, in the broader context of reliability theory solutions by probability levels calculations is performed in this paper [2], [5], [7]. A significant influence of mechanical system modeling method on the quantitative assessment of reliability measures for building structures has been shown [4].

Słowa kluczowe: niezawodność, współczynniki częściowe, klasy konsekwencji, klasy niezawodności, klasy wykonania
Keywords: reliability, partial coefficients, consequence classes, reliability classes , manufacturing classes

1. Probabilistyczne miary niezawodności konstrukcji

Wyznaczenie niezawodności Q [6], [7], dla zadanej funkcji $g(\boldsymbol{X})$ i przy znanym wektorze losowych stanów konstrukcji $\underline{\boldsymbol{X}}$,o funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f(\boldsymbol{X})$, sprowadza się do obliczenia całki:

$$Q = \int_{\Pi} f(\boldsymbol{X})dX \ , \tag{1}$$

po obszarze stanów bezawaryjnych Π, w których spełniony jest warunek $g(\boldsymbol{X}) > 0$. W przypadku podstawowym dla wzajemnie niezależnych zmiennych losowych $\underline{E}$ i $\underline{R}$ niezawodność Q można obliczyć przekształcając całkę ze wzoru (1):

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} F_E(R) f_R(R)dR = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} F_R(E) f_E(E)dE \ , \tag{2}$$

gdzie $F_E(\cdot)$ i $F_R(\cdot)$ oznaczają dystrybuanty losowego efektu obciążeń i losowej nośności $\underline{E}$ i $\underline{R}$ - odpowiednio.
Mimo stosunkowo prostej postaci wyrażeń całkowych (2), obliczenie z nich niezawodności konstrukcji Q jest możliwe

1. Probabilistic measures of structural reliability

For a given function $g(\boldsymbol{X})$ at a known vector $\underline{\boldsymbol{X}}$ of random structure states having a probability density $f(\boldsymbol{X})$, determination of reliability Q [6],[7], results in calculating the following integral:

over the trouble free states Π, for which the condition $g(\boldsymbol{X}) > 0$ is satisfied. In the basic case, for mutually independent random variables $\underline{E}$ and $\underline{R}$ the reliability Q may be determined by transformation of the integral (1):

where $F_E(\cdot)$ and $F_R(\cdot)$ denote distributions of the random load effect and random bearing capacity $\underline{E}$ and $\underline{R}$, respectively. In spite of relatively simply structured integral formulas (2), reliability of the structure Q may be usually determined only najczęściej tylko w sposób numeryczny. Zadanie obliczenia niezawodności Q staje się łatwe jeśli oprócz liniowej funkcji stanów granicznych, (por. np. [1], [3], [7], [8]):

through application of a proper numerical approach. Reliability determination problem is much easier to solve if, besides linear limit states function (cf. [1], [3], [7], [8]),:

$$g(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \underline{x}_i + a_o \,, \tag{3}$$

wektor $\underline{X}$ ma n – wymiarowy rozkład normalny, wewnętrznie nieskorelowany (dla i = 1,2,…n.:ρ_{ij} = 0 dla $i \neq j$ oraz ρ_{ii} = 1). Wykorzystując odpowiednie wzory rachunku prawdopodobieństwa obliczamy wówczas najpierw wartość średnią i wariancję funkcji (3):

the vector $\underline{X}$ exhibits n - dimensional normal distribution, internally uncorrelated (for i = 1,2,…n.:ρ_{ij} = 0 if $i \neq j$ and ρ_{ii} = 1). Then, by application of appropriate probability formulas the average value and variance of function (3) are determined:

$$\overline{g} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} a_{\mathrm{i}} \overline{x}_{\mathrm{i}} + a_{\mathrm{o}} \,, \quad \mu_{\mathrm{g}}^2 = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} a_{\mathrm{i}}^2 \mu_{\mathrm{xi}}^2 \,, \tag{4}$$

gdzie $\overline{x}_i$ (i = 1,2,…n) oraz μ_{xi} (i = 1,2,…n.) oznaczają odpowiednio; wartości średnie i odchylenia standardowe zmiennych losowych $\underline{x}_i$. Zmienna losowa $\underline{g}$, jako kombinacja liniowa (3) wzajemnie niezależnych zmiennych losowych normalnych $\underline{x}_i$, ma także rozkład normalny, o znanych parametrach (4) . Do wyznaczenia niezawodności Q wystarczy w takim przypadku obliczyć prawdopodobieństwo nierówności $\underline{g}$ > 0. Wykonując obliczenia z zastosowaniem przekształcenia tożsamościowego i standaryzowanej zmiennej losowej normalnej $\underline{\xi} = (\underline{g} - \overline{g})/\mu_g$, otrzymujemy:

where $\overline{x}_i$ (i = 1,2,…n) and μ_{xi} (i = 1,2,…n.) denote average values and standard deviations of random variables $\underline{x}_i$, respectively. Random variable $\underline{g}$, as a linear combination (3) of mutually independent normal random variables $\underline{x}_i$, exhibits normal distribution as well, with known parameters (4). In such a case, it is sufficient to determine the probability of the inequality $\underline{g}$ > 0 in order to determine the reliability Q . Calculations performed using identity transformation and standarized normal random variable $\underline{\xi} = (\underline{g} - \overline{g})/\mu_g$, result in:

$$Q = P\{\,\underline{g} > 0\} = P\left\{ \frac{\underline{g} - \overline{g}}{\mu_{\mathrm{g}}} > -\frac{\overline{g}}{\mu_{\mathrm{g}}} \right\} = P\{\,\underline{\xi} > -\beta\} = P\{\,\underline{\xi} < \beta\} = \Phi(\beta), \tag{5}$$

gdzie: $\Phi(\beta)$ – dystrybuanta standaryzowanego rozkładu normalnego, β - *wskaźnik niezawodności*, który może być alternatywną wobec Q miarą niezawodności konstrukcji:

where: $\Phi(\beta)$ - distribution function of standarized normal distribution, β - *reliability factor*, which may be applied as an structure reliability measure alternative to Q :

$$\beta = \frac{\overline{g}}{\mu_{\mathrm{g}}} \,. \tag{6}$$

Podstawą wzajemnej równoważności miar niezawodności: Q i β jest wynikająca z (5) równość $Q = \Phi(\beta)$, właściwa tylko rozkładowi normalnemu zmiennej losowej $\underline{g}$. Jeśli założenia przy których otrzymano (5) nie są spełnione, to równość (6) można traktować tylko jako definicję uproszczonej miary niezawodności – opartej na znajomości jedynie dwóch pierwszych momentów zmiennej losowej $\underline{g}$($\overline{g}$ i μ_g).

The equality $Q = \Phi(\beta)$ resulting from (5), and correct only if the random variable $\underline{g}$ exhibits normal distribution constitutes a basis for the equivalence of reliability measures Q and β . If the assumptions upon which (5) is derived are not met, the equality (6) may be treated as a definition of a simplified reliability measure – based on the knowledge of the first two moments of the random variable $\underline{g}$($\overline{g}$ and μ_g) only.

Obliczenia *probabilistyczne poziomu* 1, nie są zorientowane na wyznaczanie i kontrolę globalnych miar niezawodności konstrukcji Q wg (1) albo β wg (6). W obliczeniach tych sprawdza się jedynie nierówność deterministyczną $g(\boldsymbol{X}) \geq 0$ – przyjmując elementy wektora $\boldsymbol{X}$ jako odpowiednie kwantyle wektora losowego $\underline{\boldsymbol{X}}$. Miary niezawodności definiuje się w postaci *częściowych współczynników bezpieczeństwa* γ_i, stanowiących stosunki wartości kwantyli górnych x_{di} zmiennych podstawowych x_i do ich wartości charakterystycznych x_{ki} w przypadku obciążeń albo wartości charakterystycznych do kwantyli dolnych w przypadku cech wytrzymałościowych:

Level 1 probabilistic calculations are not oriented on determination and control of global reliability measures Q (according to (1)) or β (according to (6)) for a structure. During those calculations only deterministic inequality $g(\boldsymbol{X}) \geq 0$ is checked, under the assumption that components of vector $\boldsymbol{X}$ constitute appropriate quantile of random vector $\underline{\boldsymbol{X}}$. Reliability measures are defined as *partial safety factors* γ_i, , constituting a ratio of upper quantiles x_{di} of basic variables x_i to their characteristic values x_{ki} in the case of loads, or characteristic values to lower quantiles in the case of strength features:

$$\gamma_{\mathrm{Ei}} = \frac{x_{\mathrm{di}}}{x_{\mathrm{ki}}} \,, \quad \gamma_{Ri} = \frac{x_{\mathrm{ki}}}{x_{\mathrm{di}}} \,, \quad (i = 1, 2, \ldots n). \tag{7}$$

W świetle możliwych wielopoziomowych ocen niezawodności konstrukcji budowlanych, powstaje pytanie o wzajemne relacje pomiędzy metodami obliczeń półprobabilistycznych poziomu 1. i poziomów wyższych: 2. i 3.

Kryterium niezawodności konstrukcji budowlanych w metodzie probabilistycznej poziomu 2. $\beta \geq \beta_u$, w przypadku podstawowym funkcji stanów granicznych $g = R - E \geq 0$, można zastąpić porównaniem wartości obliczeniowych: nośności R_d i odpowiadającego jej efektu obciążeń E_d

In view of possible multilevel safety evaluations for building structures, a question arises how the semiprobabilistic calculation methods of level 1 are related to calculation methods of higher levels 2 and 3.

Reliability criterion for building structures in the second level probabilistic method, $\beta \geq \beta_u$, for the basic case of limit state functions $g = R - E \geq 0$, may be replaced by comparing the design values of: bearing capacity R_d and corresponding load effect E_d

$$R_d = \overline{R} - \beta_R \mu_R \geq E_d = \overline{E} + \beta_E \mu_E . \quad (8)$$

Spełnienie nierówności (8), pociąga za sobą spełnienie kryterium poziomu 2. pod warunkiem, że za β_E i β_R przyjmiemy częściowe wskaźniki związane, ze wskaźnikiem niezawodności β na płaszczyźnie zmiennych standaryzowanych zależnościami geometrycznymi: $\beta_R = \beta|\alpha_R|$, $\beta_E = \beta|\alpha_E|$, gdzie α_R, α_E – współczynniki wrażliwości (cosinusy kierunkowe).

W przypadku ogólnym, gdy warunek $g(X) \geq 0$ nie sprowadza się do przypadku podstawowego zastosowanie metody pół-probabilistycznej polega na podstawieniu w argumencie funkcji $g(X)$ odpowiednio dobranych wartości obliczeniowych współrzędnych wektora stanów X. W zaleceniach eurokodu 1990 szczegółowo rozpatruje się tylko przypadek, w którym warunek stanu granicznego można wyrazić za pomocą skalarowej, jednoparametrowej nośności R i stowarzyszonego z nią efektu oddziaływań E w postaci

Satisfaction of the inequality (8) results in satisfaction of the second level criterion if, and only if partial coefficients β_E and β_R are assumed to be related to the reliability factor β in plane of variables standarized by the geometrical relationships $\beta_R = \beta|\alpha_R|$, $\beta_E = \beta|\alpha_E|$ where α_R, α_E - sensitivity coefficients (directional cosines).

In general situation, when the condition $g(X) \geq 0$ is not reduced to the basic case, application of the semiprobabilistic method consists in setting properly selected design values of the state vector X for argument of the $g(X)$ function. Recommendations of the 1990 eurocode analyze in detail only the case, in which the limit state condition may be expressed by a scalar, one parameter bearing capacity R and associated action effect E having the form of

$$E_d = E\{F_{d1}, F_{d2}, \ldots a_{d1}, a_{d2}, \ldots \theta_{d1}, \theta_{d1}\} \leq R_d = R\{X_{d1}, X_{d2}, \ldots a_{d1}, a_{d2}, \ldots \theta_{d1}, \theta_{d1}\}, \quad (9)$$

gdzie indeks „d” oznacza wartości obliczeniowe:

- $F_{d1}, F_{d2}, \ldots$ – oddziaływań na konstrukcję,
- $X_{d1}, X_{d2}, \ldots$ – właściwości mechanicznych materiału konstrukcji,
- $a_{d1}, a_{d2}, \ldots$ – właściwości geometrycznych konstrukcji,
- $\theta_{d1}, \theta_{d1} \ldots$ – parametrów niepewności modelu obliczeniowego.

where index „d” denotes design values of:

- $F_{d1}, F_{d2}, \ldots$ – actions on the structure,
- $X_{d1}, X_{d2}, \ldots$ – mechanical properties of the structural material,
- $a_{d1}, a_{d2}, \ldots$ – geometrical properties of the structure,
- $\theta_{d1}, \theta_{d1} \ldots$ – uncertainty parameters of the computational model.

2. Kalibrowanie wybranych elementów niezawodności

W inżynierskim ujęciu różnicowania niezawodności konstrukcji budowlanych w normie PN-EN 1990 [9] wprowadzono trójstopniowe klasy konsekwencji CC oznaczone symbolami CC1, CC2 i CC3. Klasy konsekwencji zostały zdefiniowane w zależności od ryzyka zagrożenia życia i zdrowia ludzkiego oraz ekonomicznych konsekwencji zniszczenia konstrukcji lub utraty zdatności do użytkowania. Klasy konsekwencji CC są stowarzyszone z odpowiednimi trzema klasami niezawodności konstrukcji RC1, RC2 i RC3, dla których w normie [9] podano minimalne wymagane wartości wskaźnika niezawodności β_u, przypisane stanom granicznym nośności zestawione w tablicy 1.

W eurokodach przyjęto konwencję sprawdzania niezawodności, wg której wartości obliczeniowe x_d zmiennych podstawowych x_i zwykle nie są podstawiane bezpośrednio do równania stanu granicznego, lecz są podstawiane tzw. wartości reprezentatywne X_{rep} i F_{rep}, którymi mogą być:

- wartości charakterystyczne, czyli kwantyle: dla obciążeń F_k, dla wytrzymałości materiału X_k (lub ηX_k, gdzie η - współczynnik konwersji) oraz cech geometrycznych a_d,
- wartości nominalne, czyli wartości centralne cech geometrycznych a_{nom}

Wartości obliczeniowe F_d i X_d otrzymuje się mnożąc lub dzieląc wartości reprezentatywne przez stosowne współczynniki częściowe:

2. Calibration of selected reliability components

In the engineering approach to varying the reliability of building structures, adopted in the code PN-EN 1990 [9], three level consequence classes CC were introduced, denoted by symbols CC1, CC2 and CC3, respectively. Consequence classes were defined according to the risk of injury and loss of life, as well as economical consequences of structural failure or loss of fitness for use.

Consequence classes are related to three structural reliability classes RC1, RC2 and RC3, for which the code [9] specifies minimum required values of the reliability factor β_u assigned to the ultimate limit states listed in the Table 1. According to the reliability verification convention, adopted in the eurocodes, design values x_d of the basic variables x_i are usually not entered directly into the limit state equation, but the so called representative values X_{rep} and F_{rep} are used instead:

- characteristic values, or quantiles: F_k for loads, X_k (or ηX_k , where η - conversion coefficient) for material strength, and a_d for geometrical properties,
- nominal values, or central values for geometrical properties a_{nom} .

Design values F_d and X_d are determined through multiplication or division of representative values by appropriate partial coefficients:

$$F_d = F_{rep}\gamma_F \rightarrow E_d = E(F_k\gamma_F, a_d), \quad (10)$$

$$X_d = \eta X_k/\gamma_M \rightarrow R_d = R(\eta X_k/\gamma_M, a_d). \tag{11}$$

Tablica 1. Zalecane wartości wskaźnika niezawodności β w stanie granicznym nośności wg normy PN-EN 1990 [9]
Table 1. Recommended values of reliability factor β in ultimate limit state according to the PN-EN 1990 code [9]

Klasa niezawodności Reliability class	Minimalne wartości β_u Minimum value β_u	
	okres odniesienia 1 rok 1 year reference period	okres odniesienia 50 lat 50 years reference period
(1)	(2)	(3)
RC3	5,2	4,3
RC2	4,7	3,8
RC1	4,2	3,3

Wartość charakterystyczna wytrzymałości materiału X_k została zdefiniowana w normie PN-EN 1990 jako kwantyl na poziomie prawdopodobieństwa ω = 5 %, któremu odpowiada wskaźnik częściowy β_R = 1,64. Wartość obliczeniowa cechy materiału X_d to kwantyl dolny na poziomie prawdopodobieństwa ω = 0,1 %, któremu odpowiada wskaźnik częściowy o wartości β_R = 3,04. Współczynniki częściowe we wzorach (10) i (11) obok losowej zmienności oddziaływań (czynnik γ_f) i wytrzymałości materiału (czynnik γ_m) mogą dodatkowo uwzględniać błąd modelowania tych zmiennych losowych (czynniki γ_{Sd} i γ_{Rd}) dlatego można je zapisać w postaci iloczynów:

Characteristic value of material strength X_k is defined in the PN-EN 1990 code as the quantile at the probability level equal to ω = 5 %, to which corresponds a partial factor β_R = 1,64. The lower quantile at the probability level of ω = 0,1 % is defined as the computational value of material property X_d , to which coresponds a partial factor having the value of β_R = 3,04.
Partial factors present in the formulas (10) and (11) may cover not only random variability of actions (γ_f factor) and material strength (γ_m factor) but also modeling error of these random variables (γ_{Sd} and γ_{Rd} factors) and thus may be formulated as products:

$$\gamma_F = \gamma_f\gamma_{Sd}, \ \gamma_M = \gamma_m\gamma_{Rd}. \tag{12}$$

W pierwszej edycji eurokodów wartości współczynników (12) zostały wyspecyfikowane arbitralnie, ponieważ specyfikacje normowe na ogół nie posiadają uzasadnienia statystycznego. Przykładem takiego kalibrowania jest eurokod 1993-1-1 [10], w którym wartość obliczeniową wytrzymałości stali f_d przyjęto jako iloraz tzw. wartości nominalnej f_y i współczynnika nośności plastycznej $\gamma_{M0} = \gamma_{m0}$ = 1,0 bez uzasadnienia takiej specyfikacji.

In the first edition of eurocodes, values of factors (12) were arbitrarily specified, since code specifications usually do not have any statistical justification. Eurocode 1993-1-1 [10] constitutes an example of such calibration, as the design value of steel strength f_d is determined as the ratio of so called nominal value f_y and plastic bearing capacity factor $\gamma_{M0} = \gamma_{m0}$ = 1,0, without any justification to support such formula.

Literatura • References

[1] Biegus A., (1996), *Podstawy probabilistycznej analizy bezpieczeństwa konstrukcji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.

[2] Cornell C.A., (1969), *Structural safety specification based on second-moment reliability analysis.* Final Report. Symposium on Concepts of Safety of Structures and Methods of Design, IABSE, London-Zurich.

[3] Gwóźdź M., Machowski A., (2011), *Wybrane badania i obliczenia konstrukcji budowlanych metodami probabilistycznymi*. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków.

[4] Gwóźdź M., Machowski A., Żwirek P., (2013), *Wybrane zagadnienia niezawodności szkieletów stalowych budynków.* Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków.

[5] Hasofer A.M., Lind N.C., (1974), *Exact and invariant second-moment code format.* Journal of Engineering Mechanics Division ASCE, Vol. 100, No. EM1/1974.

[6] Kowal Z., (1967), *Bezpieczeństwo konstrukcji w świetle teorii niezawodności.* Archiwum Inżynierii Lądowej, T. XIII, z. 4/1967. Warszawa.

[7] Murzewski J., (1989), *Niezawodność konstrukcji inżynierskich.* Arkady, Warszawa.

[8] Nowak A.S., Collins K.R., (2000), *Reliability of structures.* McGraw-Hill.

[9] PN-EN 1990. (2004). *Eurokod. Podstawy projektowania konstrukcji*. PKN Warszawa.

[10] PN-EN 1993-1-1. (2006). *Eurokod 3. Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków*. PKN Warszawa.