

## Analiza niezawodności konstrukcji wsporczej poddanej działaniu drgań wymuszonych Reliability analysis of the supporting structure subjected to the action forced vibrations

Agnieszka Dudzik, Urszula Radon<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Katedra Mechaniki, Konstrukcji Metalowych i Metod Komputerowych,  
Wydział Budownictwa i Architektury, Politechnika Świętokrzyska  
Al. 1000-lecia PP 7, 25-323 Kielce  
e-mail: agad@tu.kielce.pl, zmbur@tu.kielce.pl*

*Department of Structure Mechanics, Metal Structures and Computer Methods  
Faculty of Civil Engineering and Architecture, Technological University of Kielce  
Al. 1000-lecia PP 7, 25-323 Kielce  
e-mail: agad@tu.kielce.pl, zmbur@tu.kielce.pl*

---

### Streszczenie

Celem niniejszej pracy jest analiza drgań wymuszonych konstrukcji wsporczej w ujęciu probabilistycznym. Parametry projektowe konstrukcji zdefiniowano jako wielkości deterministyczne oraz losowe. Zmienne losowe nie są skorelowane. Kryterium awarii konstrukcji zdefiniowano jako funkcję graniczną odnoszącą się do stanu granicznego nośności i użyteczności. Warunek wytrzymałościowy uwzględnia zmęczenie materiału. Wyznaczono wskaźnik niezawodności Hasofera-Linda oraz prawdopodobieństwo awarii. W obliczeniach niezawodnościowych zastosowano metody: FORM, SORM, Monte Carlo oraz Importance Sampling. W analizie probabilistycznej posłużono się programem niezawodnościowym STAND.

### Abstract

The study concerns the forced vibrations analysis of supporting structure in terms of probabilism. Structural design parameters are defined as the deterministic values and random variables. Random variables are not correlated. The criterion for structural failure is expressed the limit of functions referring to the ultimate and serviceability limit state. The condition takes into account the material fatigue. The Hasofer-Lind reliability index and the probability of failure was determined. In calculations of reliability methods were used: FORM, SORM, Monte Carlo and Importance Sampling methods. The STAND program is used to present the examples of reliability analysis.

*Słowa kluczowe: zmienne losowe, drgania wymuszone, wskaźnik niezawodności, metoda FORM.  
Keywords: random variables, forced vibrations, the reliability index, FORM method.*

---

### 1. Wstęp

Wiele konstrukcji inżynierskich poddanych jest działaniu obciążeń zmiennych w czasie, które mogą wywoływać drgania konstrukcji. Rzeczywiste obciążenia oraz parametry konstrukcyjne – a stąd wywołane przez nie drgania – często mają charakter nieregularny, przypadkowy, a mówiąc inaczej – losowy. Należy zatem rozpatrywać drgania w kategoriach probabilistycznych posługując się aparatem matematycznym z zakresu rachunku prawdopodobieństwa (Śniady P., 2000).

Metody probabilistyczne pozwalają na ilościową ocenę niezawodności konstrukcji. Takie sformułowanie pozwala na jawne uwzględnienie losowości w procesie projektowania. W rezultacie, możliwa jest budowa modelu matematycznego, który pozwala oszacować, jakie jest prawdopodobieństwo określonego zachowania konstrukcji.

Ze względu na sposób obliczenia prawdopodobieństwa awarii metody te dzielimy na:

- aproksymacyjne: FORM, SORM, metoda powierzchni odpowiedzi,
- symulacyjne: klasyczna metoda Monte Carlo, Importance Sampling, Sztuczne Sieci Neuronowe.

W prezentowanej pracy metody symulacyjne były stosowane jedynie do weryfikacji poprawności obliczeń. Podstawową metodą badawczą była jedna z metod aproksymacyjnych

### 1. Introduction

Many engineering structures subjected to the action of time-varying loads, which can cause vibration of the structure. The actual load and design parameters – and thus caused by them vibration – often are irregular, accidental, in other words – random. It must therefore be examined in terms of the probabilistic using the mathematical apparatus in the field of probability theory (Śniady P., 2000).

The probabilistic methods allow quantitative assessment of structure reliability. Such formulation makes it possible to explicitly account for randomness in the design process. As a result, it is possible to construct a mathematical model which allows estimation of the probability of a certain structure performance.

Due to the manner of computing the failure probability, the methods can be classified as:

- approximation: FORM, SORM, Response Surface Method,
- simulation: classical Monte Carlo method, Importance Sampling, Artificial Neural Networks.

In the present work, simulation methods were used only to verify the correctness of the calculations. The basic method used in the study was FORM, which is one of approximation method. As reliability measure, assumed the so-called the

FORM. Jako miarę niezawodności, przyjęto tzw. wskaźnik niezawodności Hasofera-Linda.

Hasofer-Lind reliability index.

**2. Cel pracy**

**2. Aim of the study**

Celem niniejszej pracy jest analiza probabilistyczna drgań wymuszonych konstrukcji wsporczej złożonej z dwóch stalowych dźwigarów dwuteowych pod urządzenie techniczne. Parametry projektowe konstrukcji zdefiniowano jako wielkości deterministyczne oraz zmienne losowe. Zmienne losowe nie są skorelowane. Funkcję graniczną zdefiniowano jako warunek nieprzekroczenia dopuszczalnego naprężenia dla stali oraz nieprzekroczenia dopuszczalnej amplitudy drgań. Warunek wytrzymałościowy uwzględnia zmęczenie materiału. Wyznaczono wskaźnik niezawodności Hasofera-Linda posługując się metodami analizy niezawodności tj.: FORM, SORM, Monte Carlo oraz Importance Sampling. W przedstawionym przykładzie w analizie probabilistycznej posłużono się programem niezawodnościowym STAND (Stocki R. i inni, 2009)

The study concerns the probabilistic forced vibrations analysis of supporting structure consisting of two I-shaped steel girders under the technical device.. Structural design parameters are defined as the deterministic values and random variables. Random variables are not correlated. The criterion for structural failure is expressed as the condition of the non-exceeding the allowable stresses for steel and allowable vibration amplitudes. The condition takes into account the material fatigue. The Hasofer-Lind reliability index was determined by used reliability analysis methods i.e.: FORM, SORM, Monte Carlo and Importance Sampling methods. In the examples presented below, the STAND software was employed for the reliability analysis (Stocki R. and others, 2009)

**3. Analiza probabilistyczna konstrukcji wsporczej poddanej działaniu drgań wymuszonych**

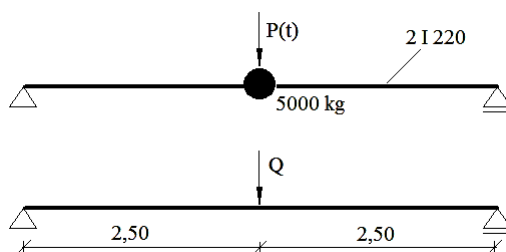
**3. Probabilistic analysis of supporting structure subjected to the action forced vibrations**

Analizie niezawodności poddano konstrukcję wsporczą pod urządzenie techniczne charakteryzujące się masowym momentem niewyważenia 2 kgm oraz pracujące z częstotliwością techniczną 220 c/min. Konstrukcję stanowi belka swobodnie podparta złożona z dwóch stalowych dźwigarów dwuteowych (Rys. 1.). Naprężenia dopuszczalne dla stali wynoszą 150 MPa, zaś współczynnik zmęczenia  $\zeta = 3$  oraz współczynnik tłumienia  $\gamma = 0,02$ . Masę własną konstrukcji wsporczej pominięto (Rakowski G., 1984).

Reliability analysis were subjected supporting structure for technical device characterized by mass unbalance torque 2 kgm and working with a technical frequency of 220 RPM. The structure is supported beam composed of two I-shaped steel girders (Fig. 1). The allowable steel stressess is 150 MPa, and the fatigue coefficient  $\zeta = 3$ , and attenuation coefficient  $\gamma = 0.02$ . The dead weight of the supporting structure is omitted (Rakowski G., 1984).

W analizie niezawodności posłużono się następującymi zmiennymi losowymi: masa urządzenia „M”, rozpiętość belki „L”, moduł sprężystości „E”, moment bezwładności dźwigarów „J” oraz wskaźnik wytrzymałości dźwigarów „W”. Zmienne losowe nie są skorelowane. W Tablicy 1 przedstawiono opis zmiennych losowych.

In the reliability analysis was used the following random variables: the device weight „M”, the beam span „L”, elastic modulus „E”, the moment of interia of girders „J” and the section modulus of girders „W”. The random variables are not correlated. Description of random variables presented in Table 1.



Rys. 1. Schemat obliczeniowy konstrukcji wsporczej pod urządzenie techniczne.

Fig. 1. Computational schematic of supporting structure for a technical device.

Tabela 1. Opis zmiennych losowych.

Table 1. Description of the random variables.

Zmienna losowa	Rozkład prawdopodobieństwa	Wartość średnia	Odchylenie standardowe	Współczynnik zmienności
Masa urządzenia „M”	normalny	5000 [kg]	50 [kg]	1%
Rozpiętość belki „L”	normalny	5 [m]	0.05 [m]	1%
Moduł sprężystości „E”	normalny	$206 \cdot 10^6$ [kN/m <sup>2</sup> ]	$103 \cdot 10^5$ [kN/m <sup>2</sup> ]	5%
Moment bezwładności „J”	normalny	$6120 \cdot 10^{-8}$ [m <sup>4</sup> ]	$3060 \cdot 10^{-9}$ [m <sup>4</sup> ]	5%
Wskaźnik wytrzymałości „W”	normalny	$556 \cdot 10^{-6}$ [m <sup>3</sup> ]	$278 \cdot 10^{-7}$ [m <sup>3</sup> ]	5%

Funkcję graniczną opisującą stan graniczny nośności zdefiniowano jako: The function describing the ultimate limit state is defined as:

$$G_1(\mathbf{X}) = 1 - (M_g/W)/\sigma_{dop} \tag{1}$$

Gdzie:  
 $\mathbf{X}$  – wektor zmiennych losowych;  $\mathbf{X}=\{M,L,E,J,W\}$ ,  
 $M_g$  – moment zginający z uwzględnieniem wpływów dynamicznych,  
 $W$  – wskaźnik wytrzymałości dźwigarów,  
 $\sigma_{dop}$  – naprężenia dopuszczalne dla stali.

Where:  
 $\mathbf{X}$  – the vector of random variables;  $\mathbf{X}=\{M,L,E,J,W\}$ ,  
 $M_g$  – the bending moment having regard the dynamic influences,  
 $W$  – the section modulus of girders,  
 $\sigma_{dop}$  – the allowable steel stressess.

Funkcję graniczną odnoszącą się do stanu granicznego użyteczności zdefiniowano jako warunek nieprzekroczenia dopuszczalnej amplitudy drgań konstrukcji wsporczej:

$$G_2(\mathbf{X}) = 1 - amq/A_{dop} \tag{2}$$

Gdzie:  
 $amq$  – amplituda drgań konstrukcji wsporczej,  
 $A_{dop}$  – dopuszczalna amplituda drgań wymuszonych dla konstrukcji wsporczej wg PN-B-03040:1980;  $A_{dop} = 550 \mu m$ .

The function relating to serviceability limit state is defined as the condition of the non-exceeding not allowable vibrations amplitude of supporting structure:

Where:  
 $amq$  – the vibrations amplitude of supporting structure,  
 $A_{dop}$  – the allowable forced vibrations amplitude of supporting structure according to PN-B-03040:1980;  $A_{dop} = 550 \mu m$ .

W przykładzie skupiono się na przeanalizowaniu w jaki sposób wprowadzanie kolejnych zmiennych losowych wpływa na wartość wskaźnika niezawodności Hasofera-Linda, a tym samym prawdopodobieństwo awarii. Wartość wskaźnika niezawodności wyznaczono korzystając z metody FORM oraz, dla porównania SORM, Monte Carlo i Importance Sampling. Wyniki zestawiono w Tablicach 2 i 3. Oszacowano błąd względny wyznaczenia wskaźnika niezawodności Hasofera-Linda przy założeniu, że układem odniesienia jest metoda Monte Carlo (Tab. 4 i 5).

In the example successive introduction of random variables affect the value of the Hasofer-Lind reliability index and therefore the probability of failure were analyzed. The reliability index values were determined using the FORM method and for the sake of comparison, with other methods, i.e. SORM, Monte Carlo and Importance Sampling. The results are shown in Tables 2 and 3. The relative error of the Hasofer-Lind reliability index is estimated, assuming that the reference system is the Monte Carlo method (Tab. 4 and 5).

Tabela 2. Wpływ opisu modelu obliczeniowego na wartość wskaźnika niezawodności oraz prawdopodobieństwo awarii dla stanu granicznego nośności.

Table 2. Effect of the computational model description on the reliability index value and probability of failure for the ultimate limit state.

Opis modelu matematycznego	Metoda analizy niezawodności							
	FORM		SORM		Monte Carlo		Importance Sampling	
	$\beta$	$p_f$	$\beta$	$p_f$	$\beta$	$p_f$	$\beta$	$p_f$
3 zmienne losowe (M + L + E)	3.196	$6.97 \cdot 10^{-4}$	3.195	$6.99 \cdot 10^{-4}$	3.155	$8 \cdot 10^{-4}$	3.156	$7.98 \cdot 10^{-4}$
4 zmienne losowe (M + L + W + J)	4.260	$1.02 \cdot 10^{-5}$	4.260	$1.02 \cdot 10^{-5}$	4.305	$9.8 \cdot 10^{-6}$	4.287	$9.05 \cdot 10^{-6}$
5 zmiennych losowych (M + L + W + J + E)	2.796	$2.59 \cdot 10^{-3}$	2.783	$2.69 \cdot 10^{-3}$	2.636	$4.20 \cdot 10^{-3}$	2.620	$4.40 \cdot 10^{-3}$

Tabela 3. Wpływ opisu modelu obliczeniowego na wartość wskaźnika niezawodności oraz prawdopodobieństwo awarii dla stanu granicznego użyteczności.

Table 3. Effect of the computational model description on the reliability index value and probability of failure for the serviceability limit state.

Opis modelu matematycznego	Metoda analizy niezawodności							
	FORM		SORM		Monte Carlo		Importance Sampling	
	$\beta$	$p_f$	$\beta$	$p_f$	$\beta$	$p_f$	$\beta$	$p_f$
3 zmienne losowe (M + L + E)	4.203	$1.32 \cdot 10^{-5}$	4.203	$1.32 \cdot 10^{-5}$	4.291	$9.05 \cdot 10^{-6}$	4.198	$1.34 \cdot 10^{-5}$
3 zmienne losowe (M + L + J)	5.970	$1.16 \cdot 10^{-9}$	5.973	$1.16 \cdot 10^{-9}$	6.022	$9.99 \cdot 10^{-10}$	5.998	$9.92 \cdot 10^{-10}$
4 zmienne losowe (M + L + J + E)	3.287	$5.06 \cdot 10^{-4}$	3.282	$5.16 \cdot 10^{-4}$	3.291	$5.00 \cdot 10^{-4}$	3.275	$5.28 \cdot 10^{-4}$

Tabela 4. Błąd względny wyznaczania wskaźnika niezawodności w odniesieniu do metody Monte Carlo dla stanu granicznego nośności.

Table 4. The relative error of determining the reliability index in relation to Monte Carlo method for the ultimate limit state.

Opis modelu matematycznego	FORM	SORM	Importance Sampling
3 zmienne losowe (M + L + E)	1.3 %	1.3 %	0 %
4 zmienne losowe (M + L + W + J)	1.1 %	1.1 %	0.4 %
5 zmiennych losowych (M + L + W + J + E)	5.7 %	5.3 %	0.6 %

Tabela 5. Błąd względny wyznaczania wskaźnika niezawodności w odniesieniu do metody Monte Carlo dla stanu granicznego użyteczności.

Table 5. The relative error of determining the reliability index in relation to Monte Carlo method for the serviceability limit state.

Opis modelu matematycznego	FORM	SORM	Importance Sampling
3 zmienne losowe (M + L + E)	2.1 %	2.1 %	2.2 %
3 zmienne losowe (M + L + J)	0.9 %	0.8 %	0.4 %
4 zmienne losowe (M + L + J + E)	0.1 %	0.3 %	0.5 %

W wyniku przeprowadzonej analizy niezawodnościowej w programie STAND uzyskujemy również informację dotyczącą liczby wywołań funkcji granicznej, a co z tym związane czasu niezbędnego do oszacowania wskaźnika niezawodności (Tab. 6 i 7).

The reliability analysis performed with the STAND software also provides information on the number of calls of the limit function, and thus on the time necessary to estimate the reliability index (Tab. 6 and 7).

Tabela 6. Analiza efektywności numerycznej metody FORM w stosunku do innych metod dla stanu granicznego nośności.

Table 6. The analysis of the numerical efficiency of FORM method in relation to other methods for the ultimate limit state.

Opis modelu matematycznego	FORM	SORM	Monte Carlo	Importance Sampling
3 zmienne losowe (M + L + E)	50	62	10000	550
4 zmienne losowe (M + L + W + J)	44	56	10000	450
5 zmiennych losowych (M + L + W + J + E)	68	98	10000	568

Tabela 7. Analiza efektywności numerycznej metody FORM w stosunku do innych metod dla stanu granicznego użyteczności.

Table 7. The analysis of the numerical efficiency of FORM method in relation to other methods for the serviceability limit state.

Opis modelu matematycznego	FORM	SORM	Monte Carlo	Importance Sampling
3 zmienne losowe (M + L + E)	29	41	10000	529
3 zmienne losowe (M + L + J)	33	39	10000	1033
4 zmienne losowe (M + L + J + E)	33	53	10000	533

#### 4. Wnioski

Jednym z celów pracy było sprawdzenie, czy proste narzędzie, jakim jest metoda FORM, jest wystarczające do przeprowadzenia analizy niezawodności konstrukcji. Dla porównania w pracy przedstawione zostały inne stosowane metody niezawodności tj. SORM, Monte Carlo, Importance Sampling. Oszacowano błąd względny wskaźnika niezawodności dla poszczególnych metod przy założeniu, że układem odniesienia jest metoda Monte Carlo. Analizując wyniki możemy zauważyć, że błąd wynosi maksymalnie 5.7% dla stanu granicznego nośności oraz maksymalnie 2.2% dla stanu granicznego użyteczności można więc uznać, że metoda FORM jest dostatecznie dokładna. Nie bez znaczenia jest również czas obliczeń, który uwarunkowany jest liczbą wywołań funkcji granicznej. Odnosząc się do uzyskanych rezultatów (Tab. 6 i 7) możemy wnioskować, że metoda Monte Carlo nie nadaje się do zastosowania w dużych zadaniach niezawodnościowych. Związane jest to jak widać ze znacznym, w porównaniu z metodą FORM, czasem obliczeń.

Wnioskować więc możemy, że metoda FORM pozwala uzyskać szybką odpowiedź, co umożliwia jej zastosowanie w praktyce inżynierskiej, jako jeden z modułów obliczeniowych programów wspomagających projektowanie konstrukcji.

#### 4. Conclusions

One of the aims of the study was to find out whether a simple tool, which the FORM method is, could be employed to perform the structure reliability analysis. For the sake of comparison, other methods, i.e. SORM, Monte Carlo, Importance Sampling, were also taken into consideration. The relative error in the reliability index was estimated for individual methods at the assumption that the Monte Carlo served as the reference method. Analyzing the results, we can see that this error is 5.7% for the ultimate limit state and 2.2% for the serviceability limit state, so we can say that the FORM method is good enough. The timescale of computations, which is related to number of calls of the limit function, should also be taken into account. As regards the results (Tab. 6 and 7) we may infer that the Monte Carlo method cannot be applied to large reliability problems. That is related to substantial, in comparison with the FORM method, amount of time necessary to perform computations.

That indicates the FORM method allows obtaining a quick response, which makes it possible to use the method in engineering practice as one of the modules of computational software that support structure design.

#### Literatura • References

- [1] PN-B-03040:1980 *Fundamenty i konstrukcje wsporcze pod maszyny* – Obliczenia i projektowanie.
- [2] Rakowski G., (1984), *Mechanika budowli z elementami ujęcia komputerowego*, Wydawnictwo Arkady, Warszawa.
- [3] Stocki R., Kolanek K., Knabel J., Tazowski P., (2009) *FE based structural reliability analysis using STAND environment*, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences. Vol. 16, 2009, pp. 35–58.
- [4] Śniady P., (2000), *Podstawy stochastycznej dynamiki konstrukcji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.